

Résolution ultime en analyse spectrale : qu'espérer ?

Nicolas FLORSCH^(*), Muriel LLUBES^(*) et Pierre MECHLER^(**)

(*) CLDG, Université de La Rochelle, nflorsch@univ-lr.fr, mllubes@univ-lr.fr

(**) Dpt de Géophysique Appliquée, UPMC, mechler@ccr.jussieu.fr

Résumé

On examine la question de la résolution de l'analyse spectrale en faisant une hypothèse forte : que les fréquences sont déjà connues. Grâce à une approche de type problème inverse, effectuée en termes de valeurs et vecteurs propres, on trouve une limite « absolue » de résolution à $\Delta F = 1/(3T)$, où T est la durée d'observation du signal. On montre que par conséquent, les méthodes paramétriques type ARMA, bien que produisant des pics étroits, ne sauraient dépasser cette limite. Ces propos sont illustrés par un exemple synthétique et par le cas de la séparation des termes annuel et Chandlérien.

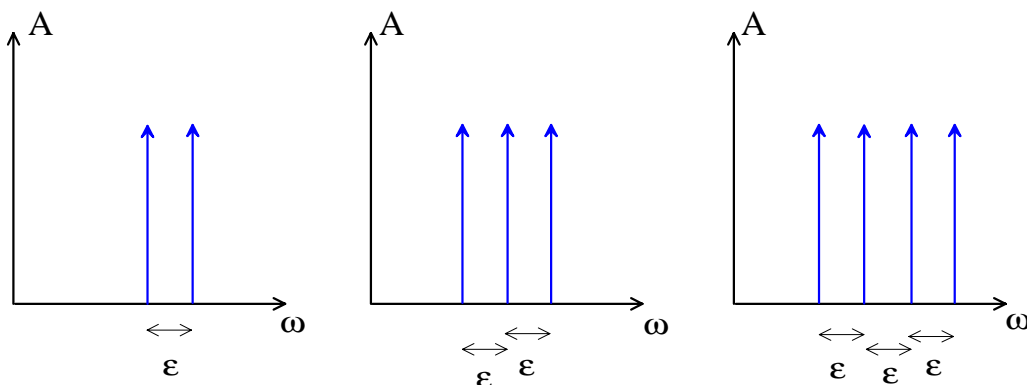
Introduction

Parmi les méthodes spectrales couramment utilisées, on peut distinguer celles qui relèvent de l'analyse de Fourier (périodogramme, corrélogramme) et celles qui sont des techniques « paramétriques » ou « non linéaires » (ARMA, Max. d'entropie=MEM, SOMPI, Prony, Pisarenko, Max. Likelihood etc...). Ces deux classes sont en concurrence en terme de **résolution**. Qu'en est-il exactement ? Dans les deux cas, on souhaite *identifier* les fréquences présentes dans le signal et *déterminer l'amplitude* des signaux détectés. Dans ce travail, on examine les possibilités de toute méthode, *via* un formalisme qui relève du problème inverse.

1. Approche par le problème inverse (méthode des moindres carrés)

1.1 Généralités

Plaçons nous dans le cadre classique de la méthode des moindres carrés, en faisant une hypothèse forte : *les fréquences sont connues*. On examine alors comment on parvient à *déterminer les amplitudes*, dans le cas de 2 ondes, 3 ondes 4 ondes, en supposant les ondes séparées par un écart de fréquence plutôt petit :



Cas de 2 ondes :

On considère le modèle : $f(t) = a_1 e^{i(\omega-\varepsilon/2)t} + a_2 e^{i(\omega+\varepsilon/2)t}$. L'approche par moindres carrés revient à chercher le minimum de : $\int_T |f(t) - a_1 e^{i(\omega-\varepsilon/2)t} - a_2 e^{i(\omega+\varepsilon/2)t}|^2 dt$. Ce problème conduit à établir un système

« d'équations normales » qui s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin c\left(\frac{\varepsilon T}{2}\right) \\ \sin c\left(\frac{\varepsilon T}{2}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Ce système est toujours *mathématiquement* soluble (déterminant non nul). Cependant, dans la pratique, des difficultés apparaissent lorsque la quantité $\left(\frac{\varepsilon T}{2}\right) = E$ est petite puisque, visiblement, le déterminant tend vers 0. (On utilise la notation $\sin c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ du « sinus cardinal »).

Cas de 3 ondes :

Le modèle s'écrit : $f(t) = a_1 e^{i(\omega-\varepsilon)t} + a_2 e^{i\omega t} + a_3 e^{i(\omega+\varepsilon)t}$

Il conduit au système des équations normales :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin c(E) & \sin c(2E) \\ \sin c(E) & 1 & \sin c(E) \\ \sin c(2E) & \sin c(E) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Cas de 4 ondes :

On aboutit au système :

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin c(E) & \sin c(2E) & \sin c(3E) \\ & & \text{etc.} & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

avec toujours :

$$\lim_{E \rightarrow 0} \det(\text{matrice}) = 0$$

1.2 Analyse en terme de valeurs propres/vecteurs propres

Dans la base des *vecteurs propres* de la matrice des équations normales, la solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \vec{a} = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\lambda_k} \vec{V}_k$$

Les β_k résultent et dépendent du second membre des équations normales. En particulier, ils « contiennent » la mesure et le bruit. La présence des valeurs propres au *dénominateur* montre que le bruit risque d'être amplifié du fait de la division, particulièrement lorsque les λ_k sont petits. (Remarque : Les λ_k sont positifs ou nuls, du fait de la structure de la matrice).

Cette analyse dans la base des fonctions propres présente l'avantage de séparer et d'exhiber les contributions pertinentes et représentatives du signal. On examine la solution des équations normales dans cette base pour les cas de 2 à 4 ondes.

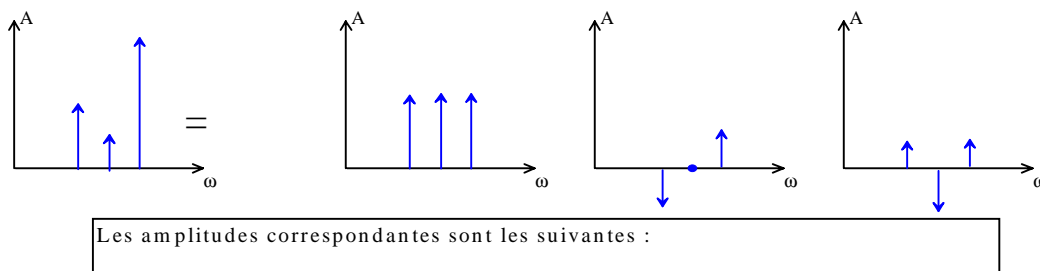
- Pour 2 ondes, on obtient : $\begin{cases} \lambda_1 \cong 2 \\ \lambda_2 \cong \frac{E^2}{6} \end{cases}$ avec les vecteurs propres : $\vec{V}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \cong \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$.

Notons pour le déterminant que : $\det \propto E^2$.

- pour 3 ondes : $\begin{cases} \lambda_1 \cong 3 \\ \lambda_2 \cong \frac{2E^2}{3} \\ \lambda_3 \cong \frac{2E^4}{135} \end{cases}$; $\vec{V}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \cong \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_3 \cong \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix}$ et enfin $\det \propto E^6$.

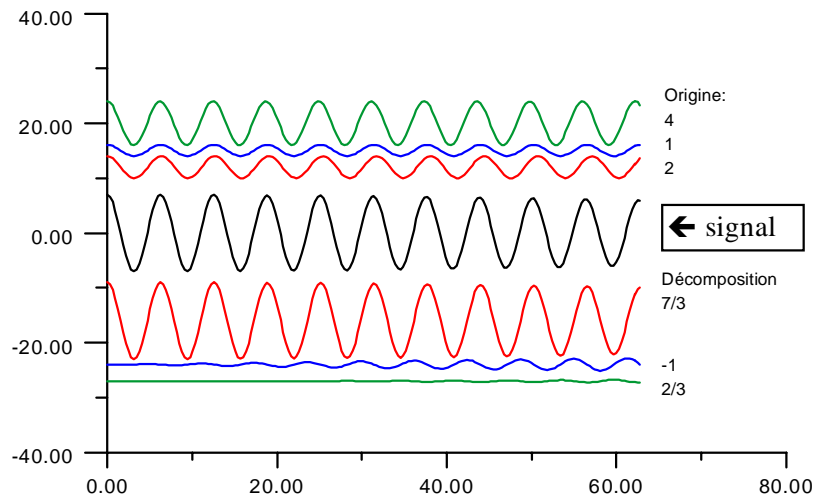
- pour 4 ondes : $\begin{cases} \lambda_1 \cong 4 \\ \lambda_2 \cong \frac{5E^2}{3} \\ \lambda_3 \cong \frac{4E^4}{45} \\ \lambda_4 \cong \frac{E^6}{875} \end{cases}$; $\vec{V}_1 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \cong \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \\ +1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_3 \cong \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_4 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\det \propto E^{12}$.

1.3. Un exemple de décomposition de 3 ondes sur la base propre est donné graphiquement ci-dessous :



- | | | | | |
|---------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| $\omega - \epsilon$ | $\rightarrow 2$ | | | |
| ω | $\rightarrow 1$ | $(1,1,1) \rightarrow 7/3$ | $(1,0,-1) \rightarrow -1$ | $(1,-2,1) \rightarrow 2/3$ |
| $\omega + \epsilon$ | $\rightarrow 4$ | | | |

Les mêmes signaux en représentation temporelle, avec une durée qui correspond à la limite de conditionnement $\epsilon T/2 = E = 0.314$, correspondent à la figure suivante :



A la limite de la résolution classique, à savoir $\Delta f = 1/T$ (T durée d'observation), on a : $E = \varepsilon T/2 = 2\pi\Delta f T/2 = \pi$. Pour $E=0.5$ (<1), les valeurs propres valent :

	2 ondes	3 ondes	4 ondes
λ_1	2	3	4
λ_2	$E^2/6 = 0.042$	$2E^2/3 = 0.16$	$5E^2/3 = 0.42$
λ_3		$2E^4/135 = 0.00093$	$4E^4/45 = 0.0055$
λ_4			$E^6/875 = 0.000018$
conditionnement $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$	24	3 200	220 000

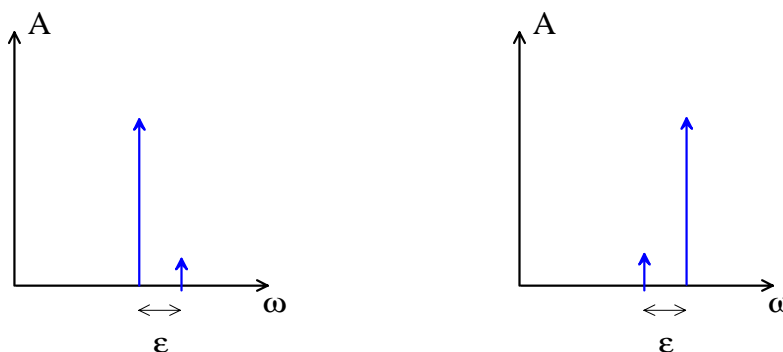
Pour 4 ondes, le bruit sur V_4 est amplifié d'un facteur de l'ordre de 10^5 .

Si l'on prend $E = 1/4$, les valeurs propres valent :

	2 ondes	3 ondes	4 ondes
λ_1	2	3	4
λ_2	$E^2/6 = 0.010$	$2E^2/3 = 0.042$	$5E^2/3 = 0.10$
λ_3		$2E^4/135 = 5.7 \cdot 10^{-5}$	$4E^4/45 = 0.00035$
λ_4			$E^6/875 = 2.8 \cdot 10^{-7}$
conditionnement $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$	200	52 000	$1.4 \cdot 10^7$

Pour 4 ondes, le bruit sur V_4 est amplifié d'un facteur supérieur à 10^7 !

En terme d'information extractible, l'indétermination en amplitude dans le multiplet se « transforme » en indétermination sur la fréquence ; en effet, on ne plus distinguer entre les deux cas de la figure suivante :



Les difficultés se manifestent dès lors que $E < 1$, soit $2\pi \Delta f T/2 = 1$, c'est à dire finalement : $\Delta f = \frac{1}{\pi T}$

Dès lors, on peut se poser les questions suivantes :

- si, EN SUPPOSANT LES FREQUENCES CONNUES, on ne peut déterminer la fréquence *sous cette résolution*, que dire des méthodes qui prétendent dépasser cette résolution ?
- et comment, finalement, interpréter les prétentions en terme de résolution des méthodes non linéaires MEM, Pisarenko etc. (une synthèse de ces méthodes est présentée par Key & Marple, 1981).

2. Discussion

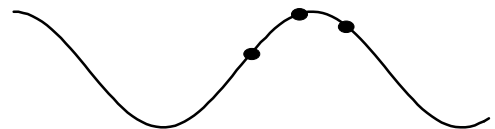
1) Nous remarquons qu'il ne faut confondre :

- *résolution* = capacité à *séparer* deux pics
- et
- « *finesse* » du pic.

Parce qu'ils peuvent s'écrire comme l'inverse de polynômes trigonométriques, parce qu'ils ont des *pôles*, les spectres déduits des méthodes apparentées aux méthodes ARMA produisent des pics FINS, ETROITS. Mais ce n'est pas pour autant que ces méthodes *séparent* mieux les pics !

2) L'intérêt spécifique des méthodes non linéaires réside dans leurs capacités à permettre l'analyse des signaux très courts, du fait des liens qui les unissent à la théorie des équations différentielles discrètes. En effet, ces méthodes peuvent être présentées dans une optique de théorie d'ajustement des coefficients des équations différentielles discrétisées que les signaux vérifient. Examinons brièvement le principe, l'avantage et l'inconvénient de ces approches « spéciales » (présentation pédagogique dans le cas d'une harmonique unique).

Soit $s(t) = \cos(\omega t)$, ou, après échantillonnage : $s_n = \cos(\omega n \Delta t)$.



On montre facilement que la suite $s_n = \cos(\omega n \Delta t)$ vérifie :

$$s_{n+1} - 2s_n \cos(\omega \Delta t) + s_{n-1} = 0 \quad (\text{c'est le modèle « autorégressif »})$$

donc en ajustant un coefficient (a) à l'équation :

$$s_{n+1} + a s_n + s_{n-1} = 0, \quad \text{on en déduit } \omega = \text{Arccos}(-a/2)/\Delta t.$$

Avantage : trois points suffisent (lorsqu'une seule fréquence est présente). Le signal peut être très court et ce sans choix très contraignant de Δt . Toutefois, on sait que ces méthodes sont très sensibles au bruit. C'est que, précisément, ces méthodes impliquent une sorte d'ajustement local de dérivées ou de différences finies de ces signaux. L'avantage est associé à cet inconvénient ! En d'autres termes, en effet, passer d'un signal s_n à une combinaison de la forme $s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}$, revient à peu de choses près à prendre une dérivée seconde. Or, la dérivation seconde *amplifie* le bruit haute fréquence (fonction de transfert en ω^2). L'ajustement par moindres carrés sur l'ensemble du signal n'est pas suffisant pour compenser la perte de rapport S/B qui en résulte (ce qui est confirmé par un calcul d'erreur effectué pour le terme (a)).

3. Conclusions générales

- on ne peut outrepasser que de peu la résolution « Fourier » avec toute autre méthode imaginable (d'autant plus que l'approche par le problème inverse fournit un cadre en terme de *théorie de l'information* : elle est générale)
- les méthodes « paramétriques » (ou non linéaires, ARMA, MEM etc) ne sont réellement intéressantes *que pour les signaux trop courts et très peu bruités*

4. Exemple synthétique

On a généré un signal de 3 ondes, séparées en pulsation de l'écart ε (4 générations avec 4 ε différents). Les fréquences de ces combinaisons sont précisées dans le tableau ci-dessous. La durée est de $T=100$ unités de temps, la résolution théorique de 0.01 en fréquence.

	ω_1	ω_2	ω_3	ε
a)	0.23	0.25	0.27	0.02
b)	0.24	0.25	0.26	0.01
c)	0.244	0.25	0.256	0.006
d)	0.248	0.25	0.252	0.002

Tableau : fréquences utilisées pour l'exemple synthétique

On traite deux cas, l'un sans bruit, avec choix de l'ordre qui minimise le résidu ; l'autre avec bruit, où l'ordre a été choisi à 10, tandis que les critères classiques proposent 6. En effet, on a observé que si l'on ne force pas un peu la résolution, les résultats obtenus sont très mauvais.

Le programme utilisé pour la méthode paramétrique (ARMA) est celui publié par Barrodale et Erickson en 1980. La Figure 1 illustre les résultats obtenus tant pour la méthode du périodogramme que pour la méthode ARMA dans le cas non bruité. La Figure 2 montre la cas légèrement bruité : ce dernier est à peine perceptible dans les spectres de Fourier. Ces résultats illustrent bien la propension d'une méthode ARMA à produire des raies fines. Cependant, on observe également que les fréquences obtenues, en terme de présence ou d'amplitude (ici des densités d'énergie) ne paraissent pas très fiables.

Figure 1 : analyse d'un signal synthétique par Fourier et méthode ARMA. La méthode ARMA détecte la présence des pics alors que la résolution de Fourier est légèrement dépassée (cas c)). Par contre, elle conduit à un résultat fallacieux dans le cas d), puisque la résolution apparente, qui est en réalité une « finesse de pic », devrait permettre de détecter la raie centrale.

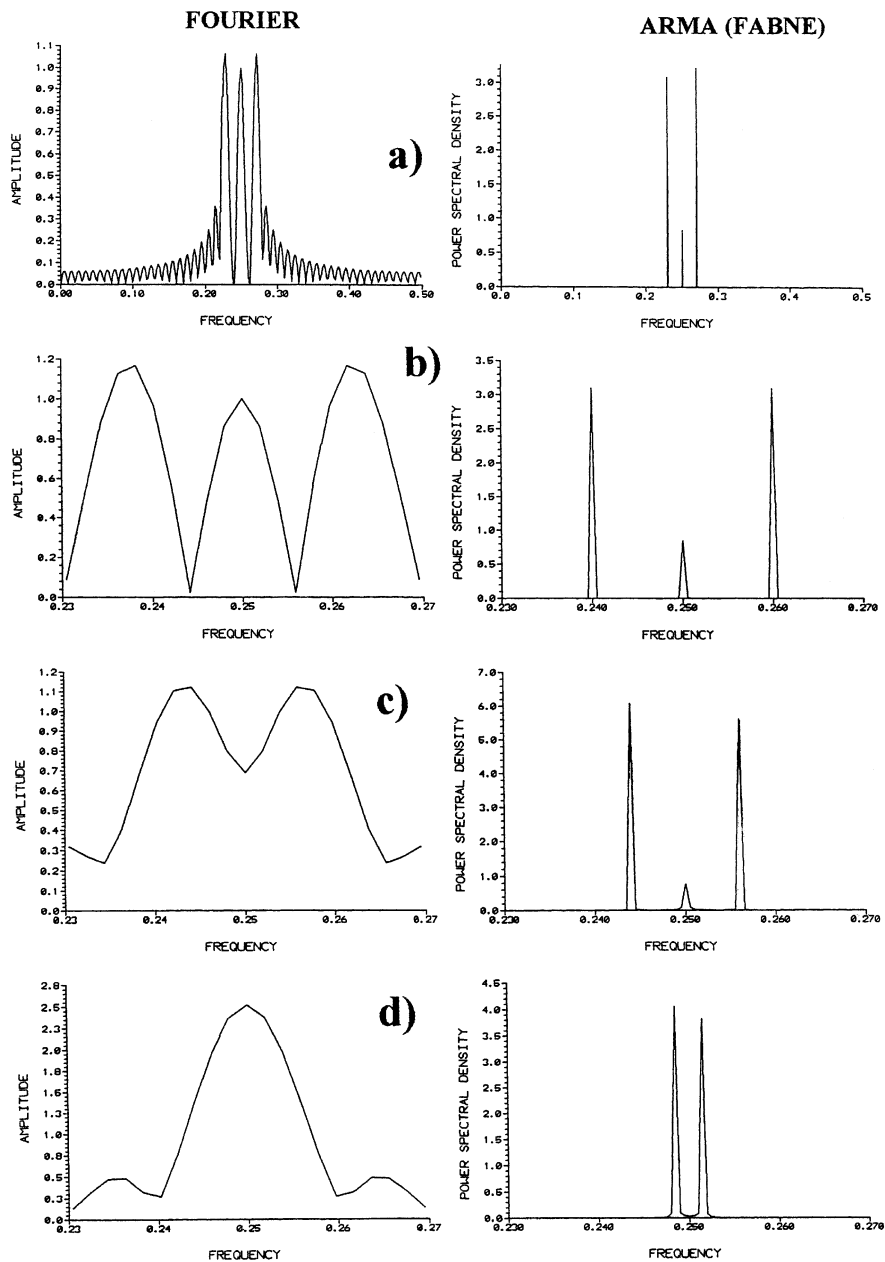
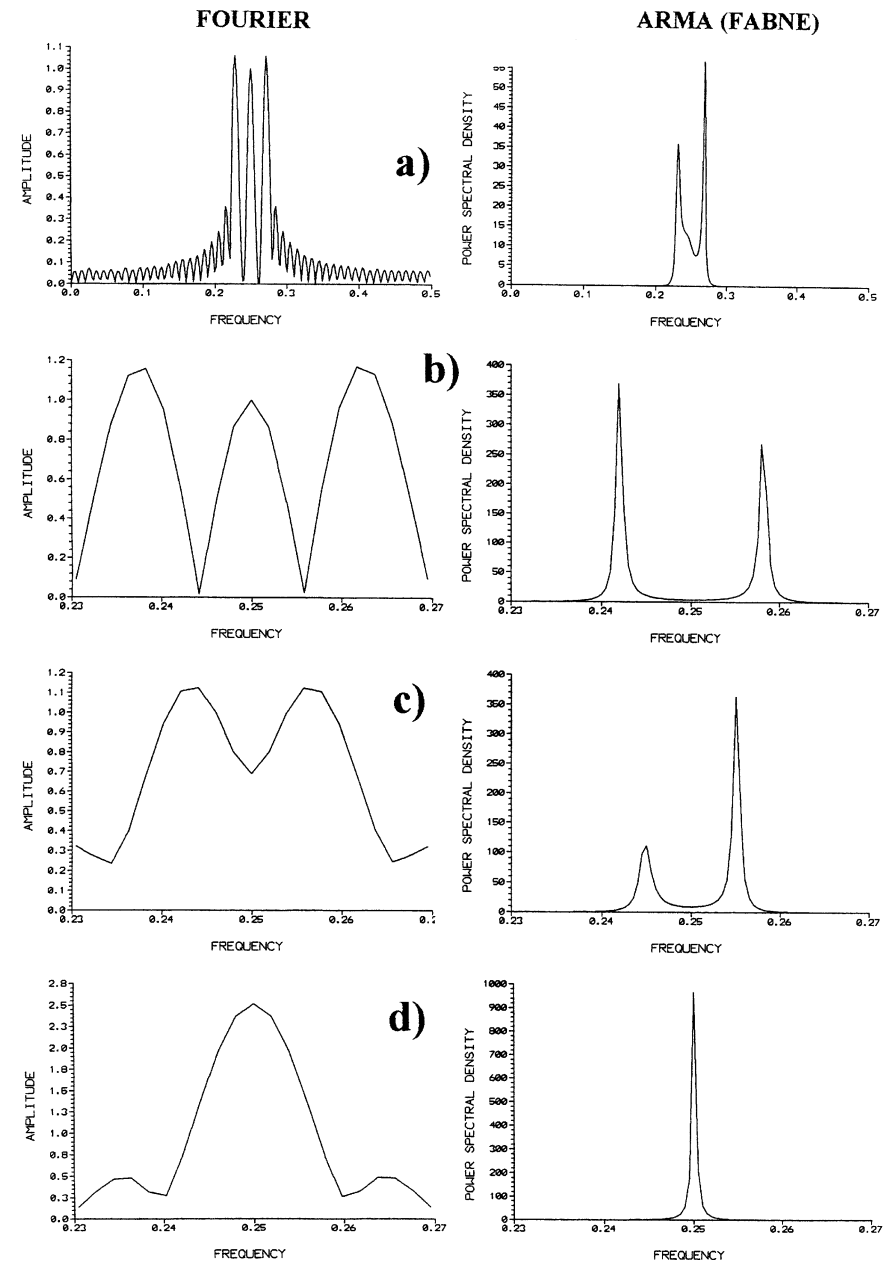


Figure 2 : analyse d'un signal synthétique par Fourier et méthode ARMA en présence de bruit. Un bruit blanc, léger, a été rajouté aux données ; il est à peine visible dans les irrégularités des lobes secondaires du spectre de Fourier. Le spectre ARMA ne permet pas la détection des trois pics injectés et s'avère donc moins bon que Fourier pour cet objectif, même s'il conduit à une grande finesse de pic.



5. Exemple sur le mouvement du pôle (Figure 3, 4 et 5)

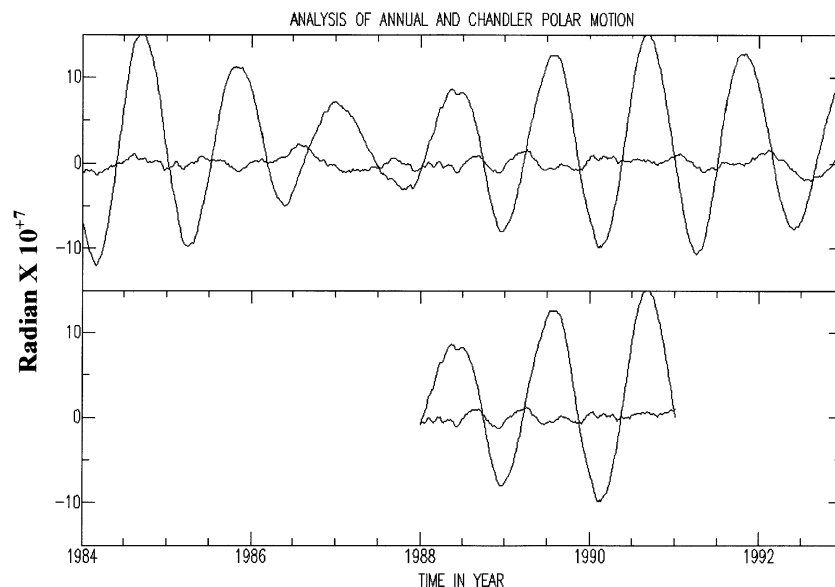
Il faut théoriquement 6 ans pour séparer le terme annuel (spectralement pur) de celui qui résulte de l'excitation du mouvement presque périodique Chandlerien (qui est en réalité une enveloppe de la résonance du phénomène). On conduit 3 expériences numériques : la première est le spectre de Fourier ; la deuxième correspond au calcul ARMA, avec des ordres parfois fixés par l'opérateur ; enfin, on fait une étude en supposant les fréquences connues et en estimant alors les amplitudes, à la résolution classique et au-delà de cette dernière. Dans ce dernier cas, on ajuste amplitude et phase pour les deux fréquences.

Le spectre de Fourier est conforme à ce qu'on attend de lui : il y a séparation des deux termes lorsque la durée est de 9 années, et non résolution pour la durée de trois années. Malgré la qualité du signal en terme de rapport signal/bruit, les résultats obtenus par la méthode ARMA sont décevants. Enfin, l'analyse par moindres carrés, dont les résultats sont dans le tableau ci-dessous, montrent que l'on parvient bien à séparer les deux ondes même dans le cas d'un signal de 3 ans. En effet, les amplitudes sont sensiblement les mêmes que celle déduites du signal plus long.

	Amplitude	Phase
annuel durée 9 ans	3.99	67
Chandlerien durée 9 ans	8.79	-2
annuel durée 3 ans	3.85	66
Chandlerien durée 3 ans	8.59	-3

Tableau : Amplitudes et phases déduites d'une composante du mouvement du pôle

Figure 3 : signal « mouvement du pôle » utilisé dans cet exemple :



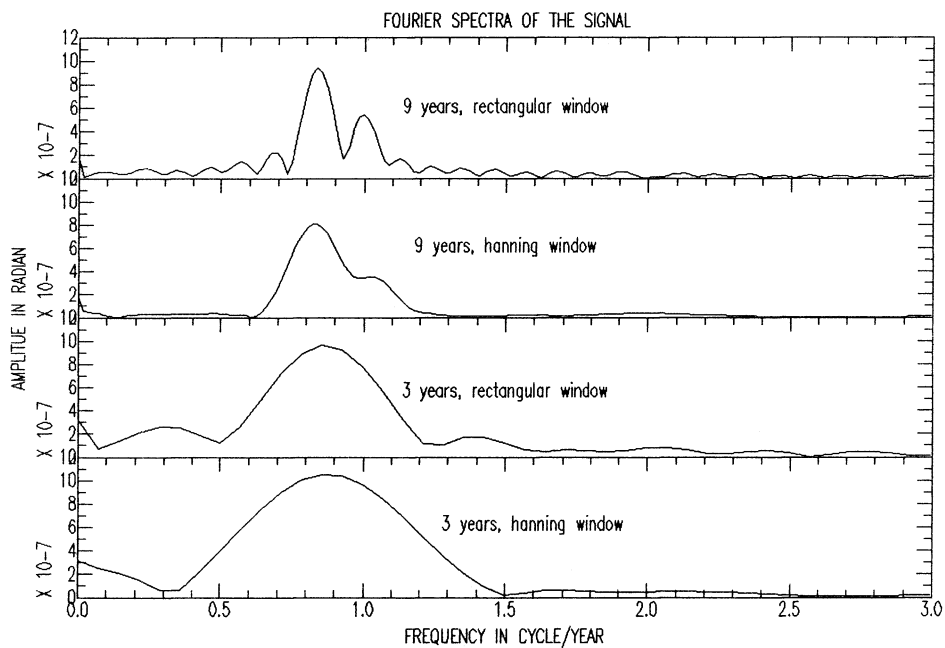
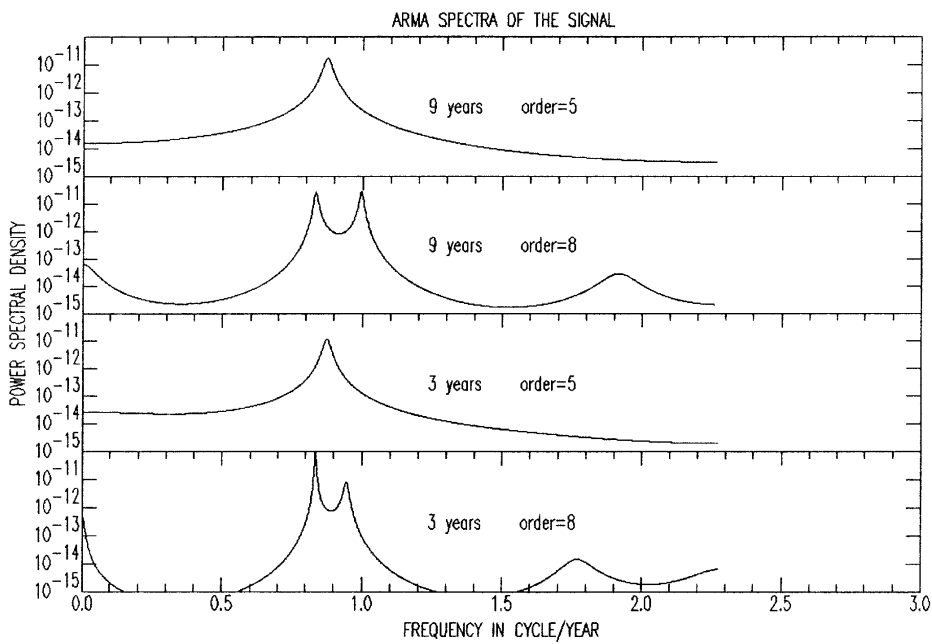


Figure 4 (en haut) et Figure 5 (en bas) : analyse par Fourier et par ARMA du signal du pôle



Pour en savoir plus

Références citées dans le texte :

Barrodale, I., and Erickson, R.E., 1980. Algorithms for least-squares linear prediction and maximum spectral analysis. Part I : theory. Part II : Fortran program. *Geophysics*, **45**, 420-446.

Kay ; S.M., and Marple. S.L., 1981. Spectrum analysis - A modern perspective. *Proc. IEEE*, **69**, 1380-1419.

Autres références :

Feng Chao, B., and Freeman, G., 1980. Autoregressive estimation of complex eigenfrequencies in low frequency seismic spectra. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **63**, 641-657.

Kumazawa, M., Imanishi, Y., Fukao, Y., Furumoto, M., and Yamamoto, A., 1990. A theory of spectral analysis based on the characteristic property of a linear dynamic system. *Geophys. J. Int.*, **101**, 613-630.

Munk, W., and Hasselmann, K., 1964. Super-resolution of tides. *Studies on Oceanography*, 339-344.

Pathak, R.K., Sengupta, S., and Sinha, S., 1997. Spectral factorization technique for estimation of an ARMA operator for multichannel deconvolution of seismic data. *Geophysical Prospecting*, **45**, 377-388.

Smylie, D.E., Clarke, G. K. C., and Ulrych, T. J., 1973. Analysis of irregularities in the Earth's Rotation. In *Methods in computational Physics*, **13**, 391-430. Academic Press, New-York.

Tamura, Y., Sato., T., Ooe., M., and Ishiguro, M., 1991. A procedure for tidal analysis with a Bayesian information criterion. *Geophys. J. Int.*, **104**, 507-516.

Ulrych, T.J. 1985. Spectral analysis and time series models : a geophysical perspective. In *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, C. Ray Smith and W.T. Grandy, Jr (eds), R. Reidel Publishing Company.