IRD Institut de recherche pour le développement

LGIT

Qu'apportent la topographie et le potentiel à la connaissance de la densité et de l'état des contraintes internes

Bernard Valette[1] Frédéric Chambat[2]

1: LGIT Chambéry

2: ENS Lyon

Information sur le profil de densité moyenne

- degré 0 du potentiel $\rightarrow GM \rightarrow \int_0^b \rho(r) r^2 \, dr$
- degré 2 du potentiel $\rightarrow I \rightarrow \int_0^b \rho(r) r^4 \, dr$

$$\mathit{Stieltjes}\,(1884) : \begin{cases} \rho \text{ décroissante} \Rightarrow \text{bornes sur } \rho(r),\ \rho_2(r),\ \rho_4(r) \\ \rho \text{ convexe} \Rightarrow \rho(0) < +\infty \Rightarrow \text{meilleures bornes} \end{cases}$$

$$\mathit{Williamson\ et\ Adams}\ (N^2 = 0) \Longrightarrow : \begin{cases} \frac{d\rho}{dr} = \rho^2 \, g \, / \, \kappa \\ \frac{dg}{dr} = -2g \, / \, r - 4 \, \pi \, G \, \rho \end{cases}$$

Résultats de Stieljes (1884)

- $\rho(x)$ est une fonction décroissante du rayon normalisé x = r/b.
- Posons $\rho_n = (n+1)\int_0^1 \rho(x) x^n dx$, de sorte que :

$$\rho_2 = \frac{3M}{4\pi b^3}, \rho_4 = \frac{15J}{8\pi b^5}, \frac{J}{Mb^2} = \frac{2}{5}\frac{\rho_4}{\rho_2}$$

- $\rho(1)$, ρ_2 et ρ_4 donnés, on pose : $x_c = \sqrt{\frac{\rho_4-\rho(1)}{\rho_2-\rho(1)}}$
- Soient $\rho_{sup}(x)$ et $\rho_{inf}(x)$ les bornes supérieures et inférieures des valeurs de $\rho(x)$ lorsque ρ décrit l'ensemble des fonctions décroissantes qui sont supérieures a $\rho(1)$ et qui ont pour moments globaux ρ_2 et ρ_4. Stieltjes (1884) a démontré que :

$$0 \leq x \leq x_c : \quad \rho_{sup}(x) = \rho_2 + (\rho_2 - \rho_4)\frac{1+x+x^2}{(1+x)x^3}, \quad \rho_{inf}(x) = \frac{\rho_4 - \rho_2 x^2}{1-x^2}$$

$$x_c \leq x \leq 1 : \quad \rho_{sup}(x) = \rho(1) + \frac{\rho_4 - \rho(1)}{x^5}, \qquad \rho_{inf}(x) = \rho(1)$$

Comportement de la densité à l'origine

$\rho(x) \sim k x^{-\alpha}$ au voisinage de 0 $\Longrightarrow$

- $\frac{d\rho}{dx} \sim -\alpha k x^{-\alpha-1}$
- $g \sim -\frac{4\pi G}{3-\alpha} x^{1-\alpha}$
- $p \sim p_0 - \frac{2\pi G k^2}{(1-\alpha)(3-\alpha)} x^{2(1-\alpha)}$
- $N^2 = \frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dx} - \frac{\rho g^2}{u} \sim \frac{4\pi G k\alpha}{3-\alpha} x^{-\alpha}\left(1 - \frac{4\pi G k}{\alpha(3-\alpha)u/\rho} x^{2-\alpha}\right)$

donc:

- $M < +\infty \Rightarrow \alpha < 3$
- $N^2(0) \geq 0 \Rightarrow \alpha < 2$
- $p(0) < \infty (ou\ g(0) = 0) \Rightarrow \alpha < 1$
- $\partial_r p(0) = 0 \Rightarrow \alpha < 0.5$
- ρ est convexe ou concave au voisinage de l'origine suivant que N^2/g tend vers 0 ou -∞ à l'origine.

Moments internes de la densité

- Définissons pour tout rayon x les moments normalisés d'ordre n :

$$\rho_n(x) = \frac{n+1}{x^{n+1}} \int_0^x \rho(t) t^n \, dt \,, \;\; \rho'_n(x) = \frac{n+1}{1-x^{n+1}} \int_x^1 \rho(t) t^n \, dt = \frac{\rho_n - x^{n+1}\rho_n(x)}{1-x^{n+1}}$$

- $\rho_n(x)$ et $\rho'_n(x)$ sont continues, dérivables à droite et à gauche, décroissantes et vérifient pour tout x et tout $0 \leq n \leq m$:

$$\begin{aligned}
&\rho_n(x) \geq \rho(x-) \geq \rho(x) \geq \rho(x+) \geq \rho'_n(x) \geq \rho(1^-) \geq \rho(1) \\
&\rho_n(x) \geq \rho_{n+1}(x) \\
&\rho'_n(x) \geq \rho'_{n+1}(x) \\
&\rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \tfrac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \tfrac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \\
&\rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \tfrac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \tfrac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left(\tfrac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)}\right)^{\frac{m-n}{m+1}}
\end{aligned}$$

Bornes sur les moments internes de la densité

- On pose: $x_c = \left(\frac{\rho_m - \rho(1)}{\rho_n - \rho(1)}\right)^{\frac{1}{m-n}}$,
- Connaissant deux des moments globaux ρ_n et ρ_m (n < m), on en déduit, pour chaque rayon x, le domaine de variabilité du couple $(\rho_m(x), \rho_n(x))$:

Si $x \leq x_c$

$$\rho_m \leq \rho_m(x) \leq \rho_{sup}(x) \text{ et } \rho_n(x) \leq x^{m-n} \frac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \frac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})}$$

$$\rho_m \leq \rho_m(x) \leq \rho_{sup}(x_c) \text{ et } \rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left(\frac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)}\right)^{\frac{m-n}{m+1}}$$

$$\rho_{sup}(x_c) \leq \rho_m(x) \leq \rho_{sup}(x) \text{ et } \rho_n(x) \geq \rho_m(x)$$

Si $x \geq x_c$:

$$\begin{aligned}
\rho_m \leq \rho_m(x) \leq \rho(1) + \tfrac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}} \quad & \text{et } \rho_n(x) \leq x^{m-n} \tfrac{1-x^{n+1}}{1-x^{m+1}} \rho_m(x) + \tfrac{\rho_n(1-x^{m+1}) - \rho_m(1-x^{n+1})}{x^{n+1}(1-x^{m+1})} \\
& \text{et } \rho_n(x) \geq \rho_m(x) + \tfrac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \tfrac{\rho_m - \rho(1)}{x^{n+1}} \left(\tfrac{\rho_m(x) - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)}\right)^{\frac{m-n}{m+1}}
\end{aligned}$$

Terre : 660 km

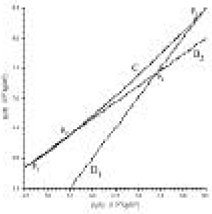

Figure 1: Cas de la Terre avec n = 2, m = 4 et $x = 0.900$ ($\geq x_c = 0.759$) correspondant à la base de la zone de transition. Dans ce cas le couple $(\rho_m(x), \rho_n(x))$ est confiné au domaine limité par **C** et $\mathbf{D_2}$ entre les points P_1 et P_2.

Terre: CMB

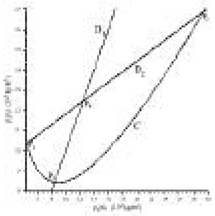

Figure 2: Figure analogue à la figure 1, dans le cas $x \leq x_c$. Il s'agit maintenant de l'interface noyau manteau avec $x = 0.548$. La courbe **C** passe au dessus du point P_4 de sorte que le couple $(\rho_m(x), \rho_n(x))$ se situe dans le domaine P_1, P_3, P_4.

Bornes des moments internes de la densité

- Soient $\rho_{k,sup}(x)$ et $\rho_{k,inf}(x)$ les bornes supérieures et inférieures du moment $\rho_k(x)$ lorsque ρ décrit l'ensemble des fonctions décroissantes supérieures à $\rho(1)$ et qui admettent ρ_n et ρ_m comme moments globaux d'ordre n et m. Alors (Valette 1999):

$0 \le x \le x_c$	$\rho_{n,sup}(x) = \rho_{m,sup}(x) = \rho_{sup}(x)$
$x_c \le x \le 1$	$\rho_{n,sup}(x) = \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}}$, $\rho_{m,sup}(x) = \rho(1) + \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}}$
$0 \le x \le x_c \left(\frac{m-n}{m+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$	$\rho_{n,inf}(x) = \rho(1) + (\rho_n - \rho(1)) \left(\frac{\rho_n - \rho(1)}{\rho_m - \rho(1)}\right)^{\frac{n+1}{m-n}}$
$x_c \left(\frac{m-n}{m+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \le x \le \left(\frac{m-n}{m+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$	$\rho_{n,inf}(x) = \rho(1) + \frac{\rho_n - \rho(1)}{x^{n+1}} - \frac{n+1}{m+1} \left(\frac{m-n}{m+1}\right)^{\frac{m-n}{n+1}} \frac{\rho_m - \rho(1)}{x^{m+1}}$
$\left(\frac{m-n}{m+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \le x \le 1$	$\rho_{n,inf}(x) = \rho_m + \frac{\rho_n - \rho_m}{x^{n+1}}$
$0 < x \le 1$	$\rho_{m,inf}(x) = \rho_m$

Contraintes Internes et Forme de la Terre

- Equation de Poisson: $\Delta\varphi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2, \quad \rho(x) = 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}^3 \setminus V,$
- Equation d'équilibre: $\mathrm{div}\sigma - \rho\,\mathrm{grad}\varphi = 0, \quad \sigma(x) = 0 \text{ for } x \in \mathbb{R}^3 \setminus V,$
- Conditions aux limites : $[\varphi] = 0, \quad \varphi(x) + (\Omega^2 x^2 - (\Omega \cdot x)^2)/2 \underset{\infty}{\to} 0,$

$$[\mathrm{grad}\varphi \cdot n] = 0, \quad [\sigma(n)] = 0,$$

- x, ρ, G, φ, $-\mathrm{grad}\varphi$, Ω, σ désignent respectivement : le vecteur position, la densité, la constante gravitationelle, le potentiel de pesanteur, le vecteur rotation et le tenseur des contraintes de Cauchy.
- [ ] désigne le saut au travers des interfaces Σ orientées par le champ des vecteurs unitaires normaux n (surface extérieure ∂V comprise).

Formalisme de Perturbation de Forme

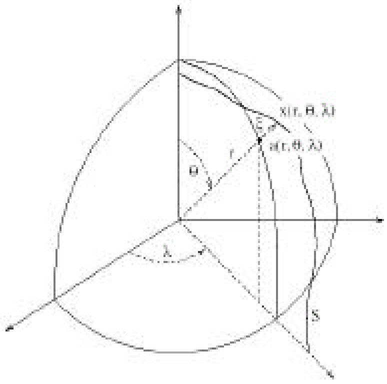

Figure 3: Le modèle de Terre est relié au modèle de référence sphérique par une déformation continue. Les paramètres physiques sont déduit de ceux du modèle de référence par un développement de Taylor qui définit les perturbations à tous les ordres. La déformation de la Terre est régie par un paramètre t qui varie de 0 (modèle de référence) à 1 (modèle de Terre).

Formalisme de Perturbation de Forme

- On définit : $\forall (a,t) \in V_0 \times [0,1], \quad (a,t) \to x(a,t) \in V_t\,, \quad V_{t=0} = V_0, \quad V_{t=1} = V$
  $\forall a \in V_0, \quad x(a,0) = a, \quad x(a,1) = x.$
- $\xi_n(a) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(a,t)\Big|_{t=0}$ déplacement lagrangien d'ordre n.
- T champ de tenseurs : $\forall (a,t) \in V_0 \times [0,1],\ (a,t) \to T(x(a,t),t)$
- On définit les perturbations lagrangiennes et eulériennes d'ordre n de T :

$$\delta_{ne}T(a) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} T(x(a,t),t)\Big|_{t=0}, \qquad \delta_{nl}T(a) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} T(x(a,t),t)\Big|_{t=0}$$

- On définit ξ, $\delta_e T$ and $\delta_l T$ par :

$$x(a,1) = a + \xi(a), \quad T(a,1) = T(a,0) + \delta_e T(a), \quad T(x(a,1),1) = T(a,0) + \delta_l T(a),$$

- développement de Taylor à l'ordre N:

$$\xi(a) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \xi_n(a), \quad \delta_e T(a) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \delta_{ne} T(a), \quad \delta_l T(a) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \delta_{nl} T(a).$$

Perturbation de l'Equation de Poisson : Une généralisation de l'Equation de Clairaut

- Perturbation de premier ordre (avec $\xi = h_\xi e_r$) entre la configuration statique sphérique et le modèle en rotation Ω.
- $\delta_e\varphi$ et $\delta_e\rho$: perturbations eulériennes du potentiel et de la densité (les indices harmoniques l, m et la dépendance en r sont omis).

$$\Delta\delta_e\varphi = 4\pi G\delta_e\rho - 2\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\delta_e\varphi = 4\pi G\delta_e\rho - 2\Omega^2\delta_l^0$$

$$[\delta_e\varphi] = 0, \quad [\partial_r\delta_e\varphi - 4\pi G\rho h_\xi] = 0$$

On définit de nouvelles variables :

- $h_\varphi = \delta_e\varphi/g$: la hauteur (au premier ordre) de la surface équipotentielle au dessus de la sphère de rayon courant.
- $\delta_\varphi\rho = \delta_e\rho + h_\varphi\ \partial_r\rho \quad (\delta_\varphi = \delta_e + h_\varphi\ \partial_r)$: les variations (au premier ordre) latérales de la densité sur les surfaces équipotentielles.
- $h = h_\xi - h_\varphi$: l'altitude au dessus des surfaces équipotentielles.

$r = b \Rightarrow h_\varphi$ correspond à la hauteur du géoïde et h à l'altitude.

Perturbation de l'Equation de Poisson : Une généralisation de l'Equation de Clairaut

- Avec ces variables et $k = \sqrt{(l-1)(l+2)}$, $\gamma = -4\pi G\rho r/3g = \rho(r)/\rho_0(r)$:

$$\partial_r^2 h_\varphi - \frac{2}{r}(1-3\gamma)\,\partial_r h_\varphi - \frac{k^2}{r^2}h_\varphi = \frac{4\pi G}{g}\delta_\varphi\rho$$

i.e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} h_\varphi \\ r\partial_r h_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 3(1-2\gamma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_\varphi \\ r\partial_r h_\varphi \end{pmatrix} - 3\gamma\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\varphi\rho/\rho \end{pmatrix}$$

avec:

- $[h_\varphi] = 0$, $r\,[\partial_r h_\varphi] = 3\,[\gamma]\,h$
- $b\partial_r h_\varphi(b) + (l-1)h_\varphi(b) = 3\gamma h(b) + \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\Omega^2 b^2}{g(b)}\delta_l^2\delta_m^0$
- $\begin{pmatrix} h_\varphi \\ r\partial_r h_\varphi \end{pmatrix}_{r\to 0}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ l-1 \end{pmatrix} r^{l-1}$

Cas hydrostatique $\Rightarrow$ les surfaces équipotentielles et isobars coincident et sont à densité constante $\Rightarrow \delta_\varphi\rho = 0$ et $h = 0 \Rightarrow$ équations de Clairaut.

Perturbation de l'Equation de Poisson : Une généralisation de l'Equation de Clairaut

Dans le cas général on obtient :

$$h_\varphi(b) = -4\pi G\left\{\int_0^b \frac{g(r)r^2}{g^2(b)b} x_1(r)\,\delta_\varphi\rho(r)\,dr + \sum_{r=r_\Sigma} \frac{g(r)r^2}{g^2(b)b}[\rho]h\,x_1(r)\right\} + \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\Omega^2 b^2}{g(b)}\delta_l^2\delta_m^0\,x_1(b)$$

où $(x_1, x_2)(r)$ est la solution de :

- $\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 & 3(1-2\gamma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{r\simeq 0}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ l-1 \end{pmatrix} r^{l-1}$ si $l > 1$
- $[x_1] = 0, \quad [x_2] = 0$ aux interfaces,
- $(x_2 + (l-1)x_1)(b) = 1$ si $l > 1$, $\quad (x_1, x_2)(b) = (0, 1)$ si $l = 1$

Equation d'Equilibre

$$div\sigma - \rho\,\mathrm{grad}\varphi = 0, \quad [\sigma(n)] = 0$$

- Dans la configuration de référence : $\sigma = -p\mathrm{I}_d$, $\quad \mathrm{grad}p = -\rho\,\mathrm{grad}\varphi$, $\quad [p] = 0$
- perturbation lagrangienne $\Longrightarrow$

$$div(\delta_l\sigma) - \nabla\sigma : \nabla\xi - \rho\,\delta_l\,\mathrm{grad}\varphi - \mathrm{grad}\varphi\,\delta_l\rho = 0$$

$$[\delta_l\sigma(e_r)] = -[\sigma(\delta_l n)] = p[(\delta_l n] = 0$$

En utilisant :

- $\delta_l\,\mathrm{grad}\varphi = \mathrm{grad}\delta_\varphi\varphi + \mathrm{H}(\varphi)(\xi) = \mathrm{grad}(gh_\varphi) + \mathrm{H}(\varphi)(\xi)$
- $\delta_l\rho = \delta_\varphi\rho + (h_\xi - h_\varphi)\,\partial_r\rho = \delta_\varphi\rho + h\,\partial_r\rho$
- $\nabla\sigma : \nabla\xi = \nabla_k\sigma^{ij}\nabla_i\xi^k = -\nabla_k p\,g^{ij}\nabla_i\xi^k = -\rho(\nabla\xi)^*\mathrm{grad}\varphi$

on obtient :

$$div(\delta_l\sigma + \rho g h\mathrm{I}_d) + g\delta_\varphi\rho\,e_r = 0$$

$$[\delta_l\sigma(e_r)] = 0$$

Equation d'Equilibre

$$div\sigma - \rho\mathrm{grad}\varphi = 0, \quad [\sigma(n)] = 0$$

- Dans la configuration de référence : $\sigma = -p\mathrm{I}_d$, $\quad \mathrm{grad}p = -\rho\mathrm{grad}\varphi$, $\quad [p] = 0$
- perturbation lagrangienne $\Longrightarrow$

$$div(\delta_l\sigma) - \nabla\sigma : \nabla\xi - \rho\,\delta_l\,\mathrm{grad}\varphi - \mathrm{grad}\varphi\,\delta_l\rho = 0$$

$$[\delta_l\sigma(e_r)] = -[\sigma(\delta_l n)] = p[(\delta_l n] = 0$$

En utilisant :

- $\delta_l\,\mathrm{grad}\varphi = \mathrm{grad}\delta_{e\varphi} + \mathrm{H}(\varphi)(\xi) = \mathrm{grad}(gh_\varphi) + \mathrm{H}(\varphi)(\xi)$
- $\delta_l\rho = \delta_\varphi\rho + (h_\xi - h_\varphi)\,\partial_r\rho = \delta_\varphi\rho + h\,\partial_r\rho$
- $\nabla\sigma : \nabla\xi = \nabla_k\sigma^{ij}\nabla_i\xi^k = -\nabla_k p\, g^{ij}\nabla_i\xi^k = -\rho(\nabla\xi)^* \mathrm{grad}\varphi$

on obtient :

$$div(\delta_l\sigma + \rho gh\mathrm{I}_d) + g\delta_\varphi\rho\, e_r = 0$$

$$[\delta_l\sigma(e_r)] = 0$$

Equation d'Equilibre

En identifiant composantes radiales poloidales et torroidales, on obtient:

- $\delta_\varphi\rho = -(U + \partial_r(\rho gh))/g$
- $\rho gh = -rV$
- $W = 0$

i.e.

- $\delta_\varphi\rho = \frac{-1}{gr^2}\left\{\partial_r\left((P - L - k^2M - r\partial_r Q - Q)r^2\right) - k^2(Q + 2M)r\right\}$
- $h = -\frac{1}{\rho g}(L - k^2M + r\partial_r Q + 3Q)$
- $r^3R = k^2\int_0^r s^2N\,ds$

avec : $\quad [P] = [Q] = [R] = 0$

- Si e_r est direction propre de $\delta_l\sigma$, *i. e.* si il existe des lignes de contraintes quasi-radiales : $N = Q = R = 0$
- Si de plus $\delta_l\sigma$ est transversalement isotrope : $M = N = Q = R = 0$

Expression de $h_\varphi(b)$ en Fonction des Potentiels

En reportant l'expression de $\delta_\varphi\rho$, on obtient après une intégration par partie :

$$h_\varphi(b) = \frac{4\pi G}{g^2}(b)\int_0^b \left\{x_2(L - P - k^2M - 2(2-3\gamma)Q) - 2k^2x_1(M+Q)\right\}(r)\frac{r}{b}dr$$

$$+\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\Omega^2b^2}{g(b)}\delta_l^2\delta_m^0x_1(b)$$

avec : $[P - L + k^2M] = [\rho]gh$

et : $\delta_\varphi\rho = \frac{-1}{gr^2}\left\{\partial_r\left((P - L - k^2M - r\partial_rQ - Q)r^2\right) - k^2(Q+2M)r\right\}$

Si l'on suppose qu'il existe des lignes de contrainte quasi-radiale : $Q = R = N = 0$:

$$h_\varphi(b) = \frac{4\pi G}{g^2}(b)\int_0^b \left\{x_2(L - P - k^2M) - 2x_1k^2M\right\}(r)\frac{r}{b}dr + \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\Omega^2b^2}{g(b)}\delta_l^2\delta_m^0x_1(b)$$

avec : $[P - L + k^2M] = [\rho]gh$ et : $\delta_\varphi\rho = -(\partial_r\left((P - L + k^2M)r^2\right) - 2k^2Mr)/gr^2$

Estimation de la composante l = 2, m = 0 de la différence de contrainte

- après correction 2eme ordre hydrostatique : $J2 = 1.0837\ 10^{-3}$, après correction globale : $J2 = 1.40\ 10^{-5}$
- $h_\varphi(b) = k\int_{b-e}^{b} d(r)f(r)dr$, $k = 4\pi G/bg^2$, $f(r) \simeq 2r^3/3b^2$
- $\|d\|_1 \geq \frac{1}{k}\frac{|h_\varphi(b)|}{\|f\|_\infty} \simeq \frac{3g^2|h_\varphi(b)|}{8\pi Ge}$, $\|d\|_\infty \geq \frac{1}{k}\frac{|h_\varphi(b)|}{\|f\|_1} \simeq \frac{3g^2|h_\varphi(b)|}{8\pi Ge}$
- e = 20 km $\Rightarrow \simeq$ 3.5 kilobars, e = 660 km $\Rightarrow \simeq$ 150 bars

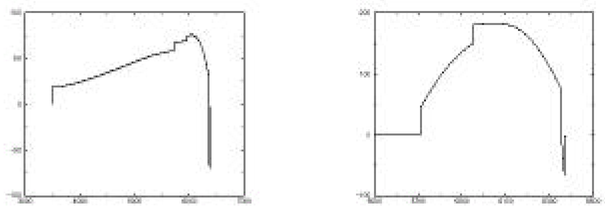

Figure 4: d en fonction de r, à gauche e = 2900 km, à droite e = 660 km