



INSTITUT
GÉOGRAPHIQUE
NATIONAL

IGN

Ecole d'été GDR-G2

Sciences

Géographiques

Ionosphère et propagation des signaux GPS

Marie-Noëlle Bouin

IGN/LAREG

D'après Thomas Herring

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Propagation des signaux GPS : retard ionosphérique

• Plan

- Rappels sur la propagation des signaux EM
- Effets de la traversée des plasmas.
- Retard ionosphérique dans les calculs GPS
- Exemples : quelques résultats

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Équations de Maxwell en milieu infini

- En supposant le milieu non conducteur, sans sources et à constante diélectrique et perméabilité constantes :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

- \mathbf{E} = champ électrique; ϵ est la constante diélectrique du milieu (ou permittivité)
- \mathbf{B} = densité de flux magnétique (induction); μ est la perméabilité magnétique

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Équation d'ondes

- Décomposable en cartésien : chaque composant de \mathbf{E} et \mathbf{B} vérifie les éq d'ondes
Pour chaque composant u :

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- La solution de l'équation d'ondes est alors :

$$\begin{aligned}u &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\omega}{c} \text{ vecteur d'onde} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} \quad \mathbf{B} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{|\mathbf{k}|}\end{aligned}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Propagation simplifiée dans l' ionosphère

- Si on suppose qu'on a un plasma à faible densité, les électrons libres n'interagissent pas entre eux.
- L'équation du mouvement d'un électron libre en présence d'un champ électrique est donnée par :

$$m[\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{w}_0^2 \mathbf{x}] = -e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

- où m et e sont la masse et la charge d'un électron, et γ une force de freinage. Les forces magnétiques sont négligées.

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Modèle simplifié de l'ionosphère

- Le moment dipolaire d'un électron est donné par $\mathbf{p} = -e\mathbf{x}$
- Si on suppose que les électrons sont libres, la constante diélectrique du milieu devient : (avec f_0 la fraction d'électrons libres):

$$\epsilon(\mathbf{w}) = \epsilon_0 + i \frac{4\mathbf{p}Nf_0e^2}{m\mathbf{w}(\mathbf{g}_0 - i\mathbf{w})}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Limite haute fréquence (cas du GPS)

- Quand les ondes EM sont des ondes haute fréquence, l'indice de réfraction n peut s'écrire, pour une densité NZ d'électrons par unité de volume:

$$n^2(\mathbf{w}) = \mathbf{m} \approx 1 - \frac{\mathbf{w}_p^2}{\mathbf{w}^2}$$

avec $\mathbf{w}_p^2 = \frac{4\pi NZe^2}{m}$ ⇒ fréquence de plasma

- Pour l'ionosphère, $NZ=10^4\text{-}10^6$ électrons/cm³ et $\omega_p = 6$ à 60 MHz (bcp plus faible que f_{GPS})
- Le nombre d'ondes est alors donné par $k = \sqrt{\mathbf{w}^2 - \mathbf{w}_p^2} / c$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Effets du champ magnétique.

- Jusqu'à présent, on a négligé le champ magnétique et son effet sur le mouvement d'un électron. Si on le réintroduit, on obtient :

$$m\ddot{\mathbf{x}} - \frac{e}{c} \mathbf{B}_0 \times \dot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}e^{-i\omega t} \text{ pour } \mathbf{B}_0 \text{ transverse}$$
$$x = \frac{e}{m\mathbf{w}(\mathbf{w} \mp \mathbf{w}_B)} \mathbf{E} \text{ pour } \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)E$$
$$\mathbf{w}_B = \frac{e|B_0|}{mc} \text{ pulsation de précession}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Effets du champ magnétique

- Pour des fréquences assez hautes, les équations précédentes sont valables pour le composant du champ magnétique parallèle à la direction de propagation.
- Les ondes avec une polarisation circulaire gauche ou droite se propagent différemment (biréfringence).

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Influence des indices de réfraction

- Jusqu'à présent, on n'a considéré que des ondes d'une seule fréquence.
- Pour des paquets d'ondes (ie., plusieurs fréquences), la vitesse de propagation va dépendre de la fréquence : milieu dispersif
- Si la dispersion est faible, le paquet d'ondes garde sa forme au cours de la propagation, à la vitesse $d\omega/dk$ (alors qu'une onde à fréquence unique se propage à la vitesse ω/k)

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe

- Les vitesses de phase v_p et de groupe v_g sont données par :

$$v_p = c / \sqrt{m\epsilon} \quad v_g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} (\sqrt{m\epsilon(\omega)}) \frac{\omega}{c} + \sqrt{m\epsilon(\omega)}/c}$$

- Si ϵ est indépendant de ω , alors $v_p=v_g$
- Pour l'ionosphère, on a $\epsilon\mu < 1$ et donc $v_p > c$. On a approximativement $v_p = c + \Delta v$ et $v_g = c - \Delta v$ avec Δv dépendant de ω^2 ou de f^2

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe

- Dans le cas de l'ionosphère, on peut écrire :

$$v_p = If, \quad v_g = -I^2 \frac{df}{dI} \text{ et comme} \\ f = \frac{v_p}{I}, \quad v_g = v_p - I^2 \frac{dv_p}{dI}$$

- Si on passe aux indices, on peut décomposer n_p :

$$n_p = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe(2)

- Les coefficients c_2, c_3, c_4 dépendent de la densité électronique N_e
- Puisque $v=c/n$, on peut dériver des relations entre v_p et v_g des relations équivalentes entre n_p et n_g :

$$n_g = n_p + f \frac{dn_p}{df}$$

- En reprenant le développement en série de n_p et en s'arrêtant aux termes d'ordre 2 :

$$n_g = 1 + \frac{c_2}{f^2} - 2f \frac{c_2}{f^3} = 1 - \frac{c_2}{f^2}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe(3)

- Pour l'ionosphère, le coefficient c_2 vaut -40,3 N_e (négatif !)
- Si on calcule le chemin équivalent d'après le principe de Fermat :

$$s = \int n ds$$

- En prenant la différence par rapport au cheminement dans le vide pour la phase :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \int n ds - \int ds_0 = \int \left(1 + \frac{c_2}{f^2}\right) ds - \int ds_0 \\ \Delta f &= -\frac{40,3}{f^2} \int N_e ds_0\end{aligned}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe(4)

- Si on définit le TEC (contenu électronique total) par

$$TEC = \int Ne ds_0$$

- on a les différences de chemins sur la phase et la pseudo distance

$$\Delta\Phi = I\Delta f = -\frac{40,3}{f^2} TEC$$

$$\Delta g = +\frac{40,3}{f^2} TEC$$

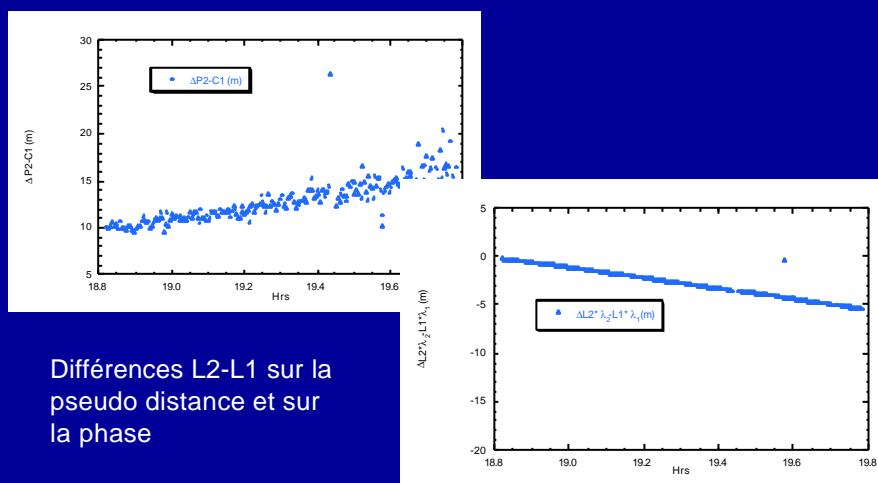
- on a donc une avance de phase, un retard de groupe

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Vitesse de phase et vitesse de groupe(5)



25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Correction ionosphérique bifréquence

- Les vitesses de groupe et de phase des ondes GPS dépendent du carré de la fréquence. On peut utiliser cette dépendance pour corriger le retard.
- On a sur la pseudo distance :
- On peut donc former la combinaison linéaire :

$$R_c = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} R_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} R_2$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathbf{r} + c\Delta t + I_1 + T \\ R_2 &= \mathbf{r} + c\Delta t + I_2 + T \\ \text{avec } I_2 &= \frac{f_1^2}{f_2^2} I_1 \end{aligned}$$

où on élimine les effets ionosphériques

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Combinaisons linéaires bifréquences

- D'après les équations précédentes, on a pour la pseudo distance :

$$R_C = \mathbf{r} + c\Delta t + T$$

- Pour la phase, rapportée en cycles :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{f_1}{c} \mathbf{r} + f_1 \Delta t + I_{1,f} + \frac{f_1}{c} T + N_1 \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{f_2}{c} \mathbf{r} + f_2 \Delta t + I_{2,f} + \frac{f_2}{c} T + N_2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } I_{2,f} = \frac{f_1}{f_2} I_{1,f}$$

$$\begin{aligned} I_{1,f} &= -\frac{1}{I_1} I_1 = -\frac{f_1}{c} I_1 \\ I_{2,f} &= -\frac{1}{I_2} I_2 = -\frac{f_2}{c} I_2 \end{aligned}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Combinaisons linéaires bifréquences(suite)

- On aura donc cette fois :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_c &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \mathbf{f}_1 - \frac{f_2 f_1}{f_1^2 - f_2^2} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_c &= \frac{f_1}{c} \mathbf{r} + f_1 \Delta t + \frac{f_1}{c} T + \frac{f_1^2 N_1 - f_1 f_2 N_2}{f_1^2 - f_2^2}\end{aligned}$$

- soit numériquement pour les fréquences GPS

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_c &= 2,546 \mathbf{f}_1 - 1,982 \mathbf{f}_2 \\ R_c &= 2,546 R_1 - 1,546 R_2\end{aligned}$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Combinaisons linéaires bifréquences(suite)

- On peut aussi former des combinaisons linéaires contenant l'ionosphère et rien (ou quasiment rien) d'autre.
- Sur les PR, il suffit de prendre la différence :

$$R_{LG} = \frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} (R_1 - R_2) = \Delta TEC$$

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Combinaisons linéaires bifréquences(suite)

- Sur les phases, on forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_G = I_F &= -\frac{f_2}{f_1} \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \\ &= \frac{f_2}{c} \frac{A(f_1^2 - f_2^2)}{f_1^2 f_2^2} TEC + \frac{f_1 N_2 - f_2 N_1}{f_1}\end{aligned}$$

- La combinaison linéaire contenant les variations ionosphériques (I_φ ou LG) permet d'évaluer la partie des variations de L1 et L2 venant de l'ionosphère, et de dériver des observations un modèle ionosphérique.

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Amplitudes

- Les facteurs multiplicatifs 2.546 et 1.546 sur les mesures de distances L1 et L2 indiquent que le bruit sur la combinaison linéaire iono free sera plus important que sur L1 et L2 pris séparément.
- Si on suppose que le bruit sur L1 est le même que sur L2, alors le bruit sur R_c sera 3 fois plus important.
- Pour des stations GPS très proches, le positionnement différentiel sera dégradé si on utilise la combinaison linéaire.
- Les ambiguïtés ne sont plus « entières »
- Ordre de grandeur du retard iono : 1-10 parts par million (ie. 1-10 mm sur 1 km)

25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Effets des approximations

- Si on dérive les expressions de la combinaison linéaire bifréquence, plusieurs approximations peuvent avoir des effets :
 - développement en série de la racine de ε (dépendance en f^4)
 - On néglige la dépendance par rapport au champ magnétique (en f^3). Sur le GPS, on peut avoir des erreurs de qq cm.
 - Effets de la différence des trajets effectifs parcourus par f_1 et f_2 . Dépend des caractéristiques du milieu, probablement en f^4 .

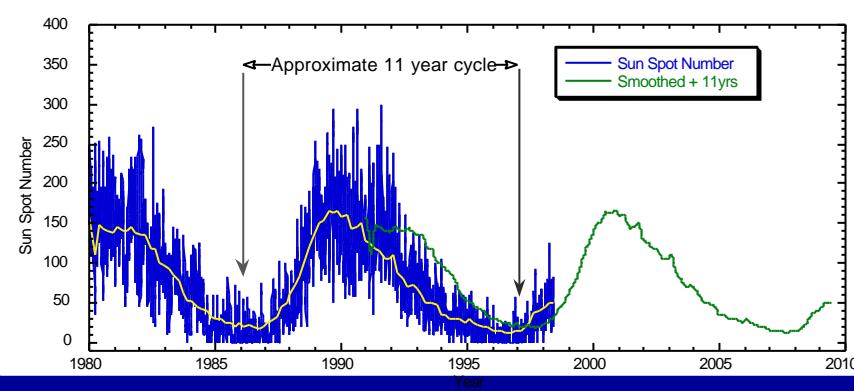
25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Variations de l'ionosphère

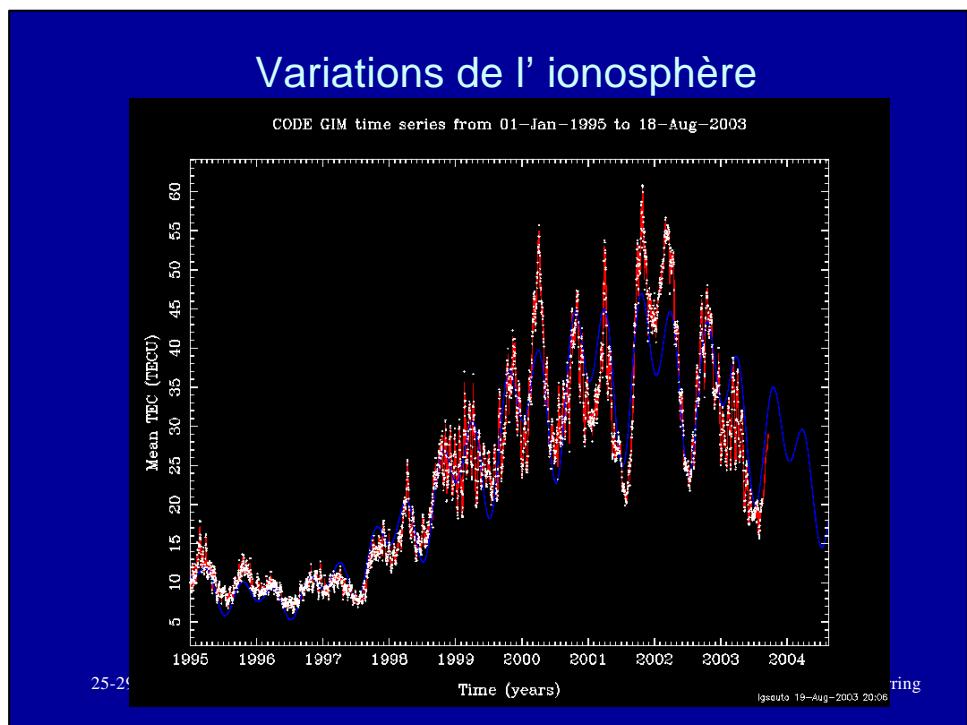
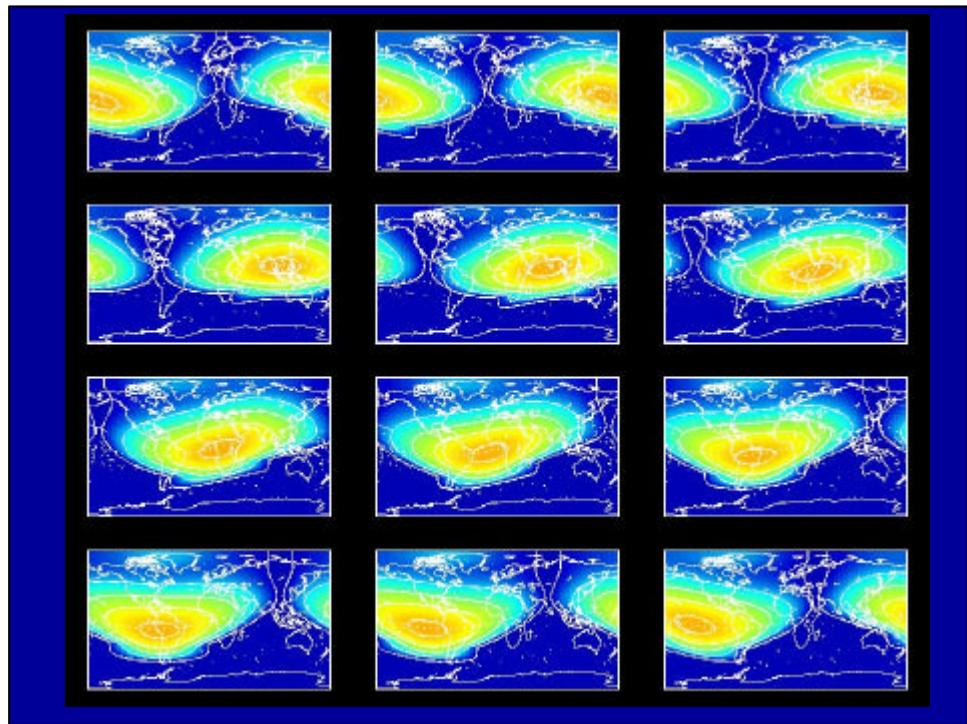
- Cycle solaire de 11 ans



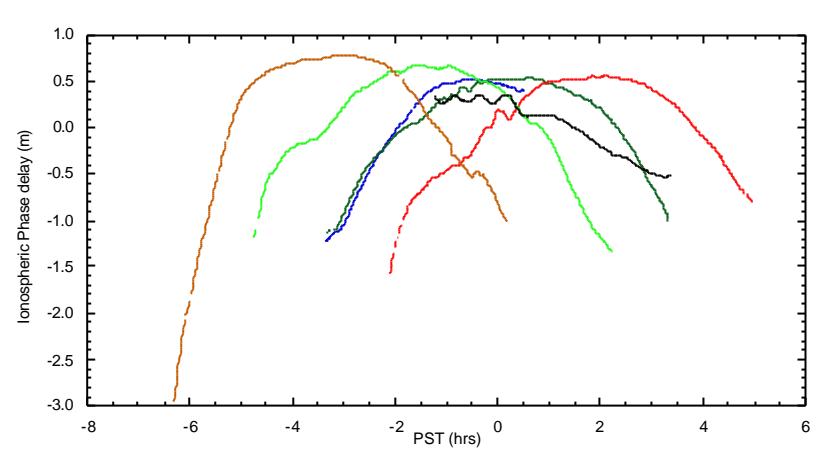
25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring



Exemple du réseau JPL Californien

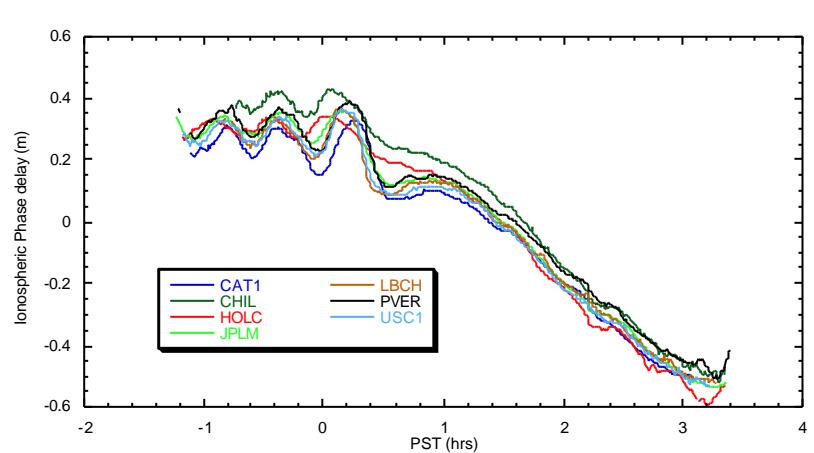


25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

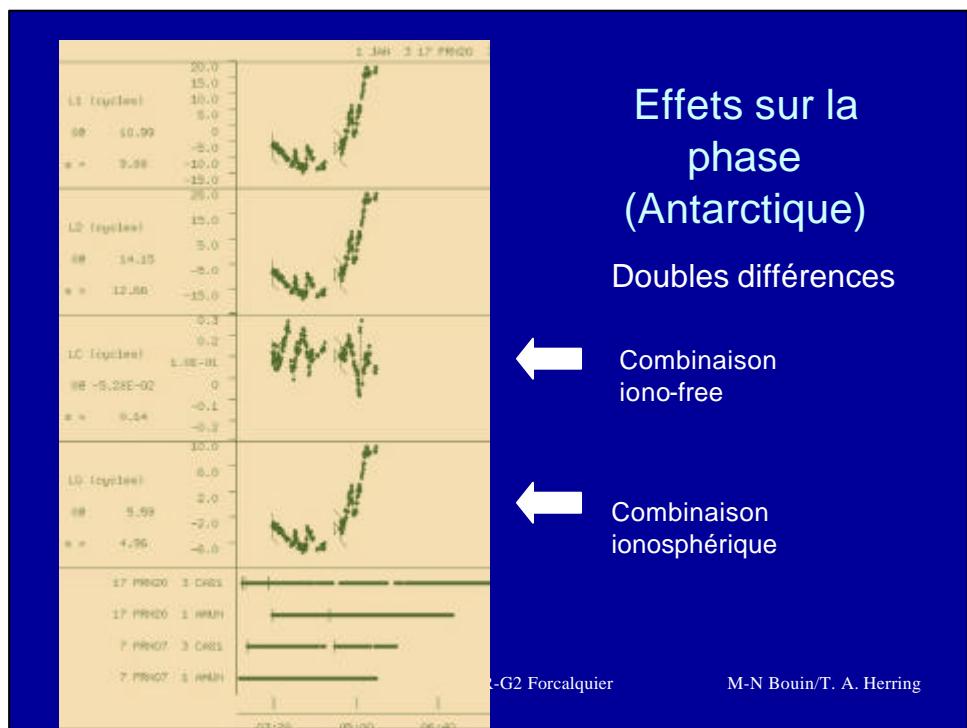
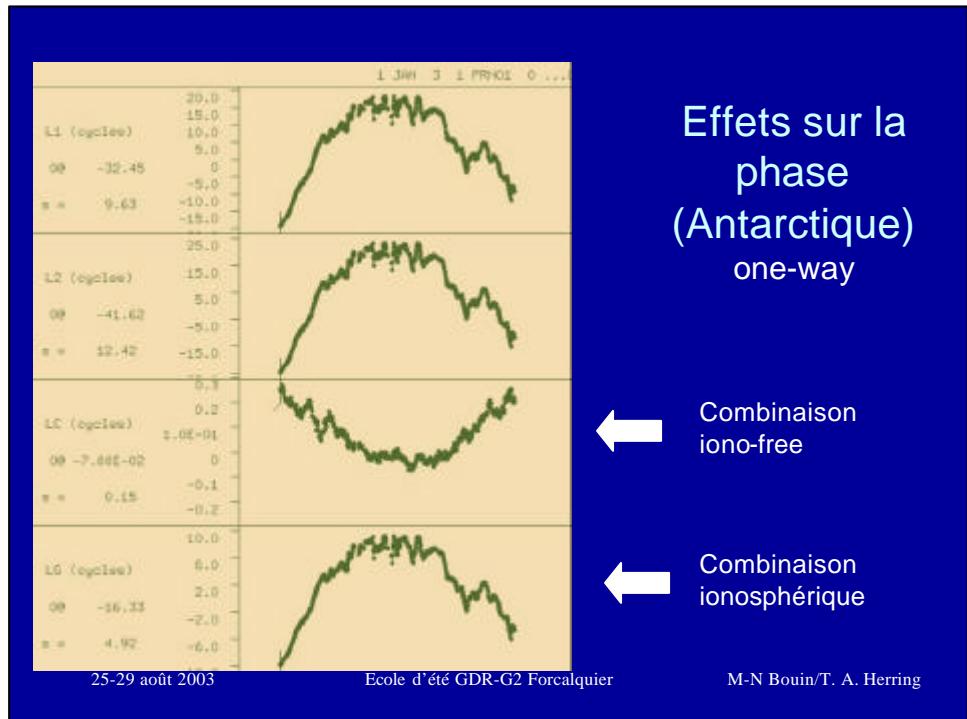
Exemple du sat PRN03, Californie du Sud

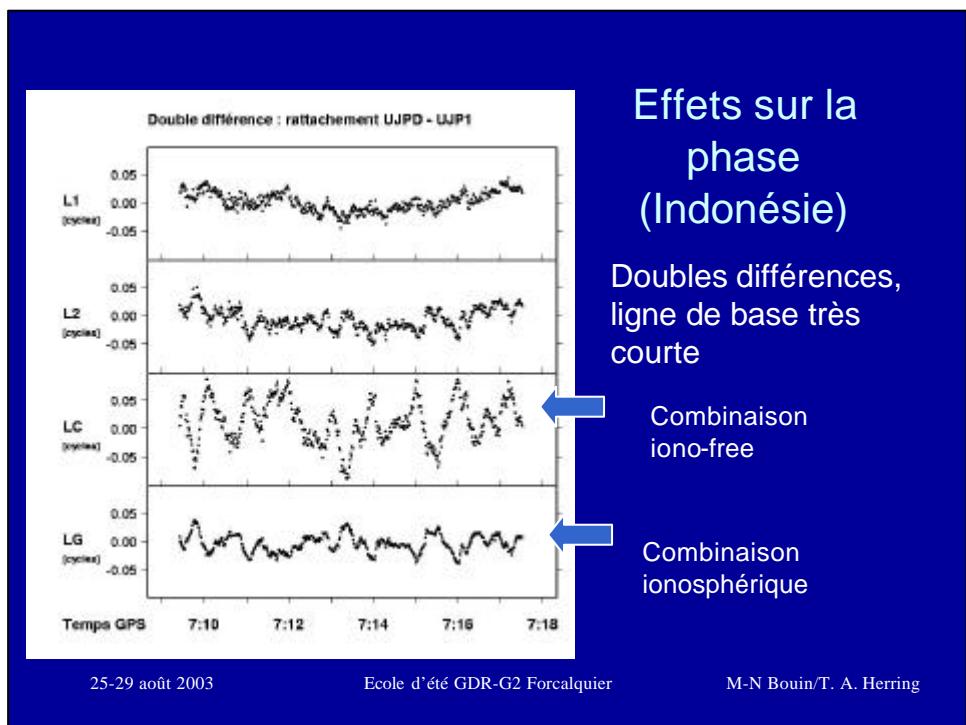
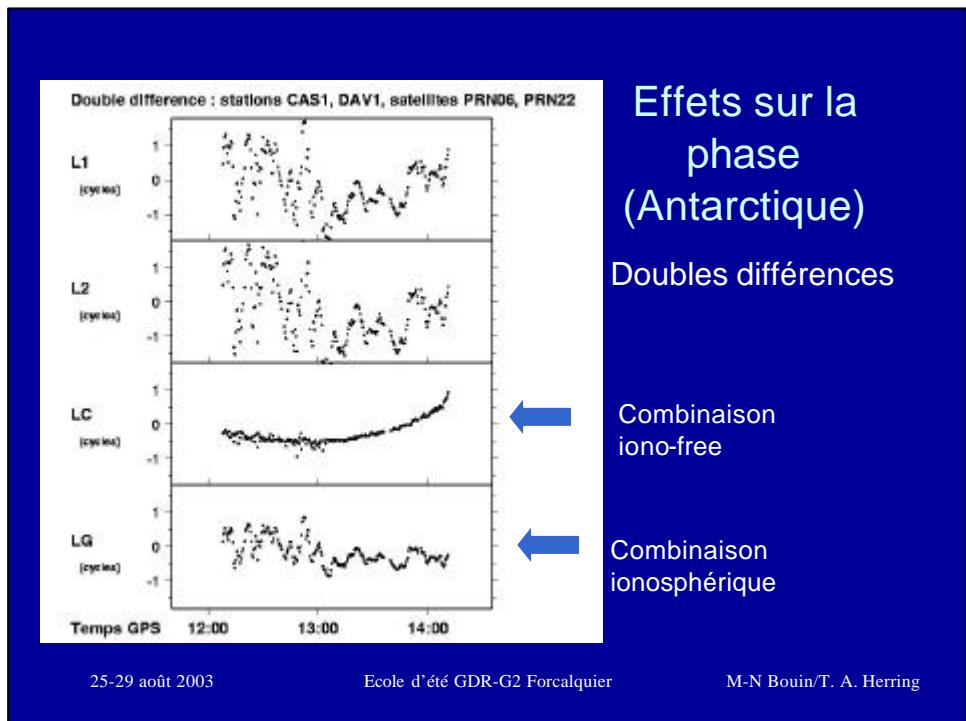


25-29 août 2003

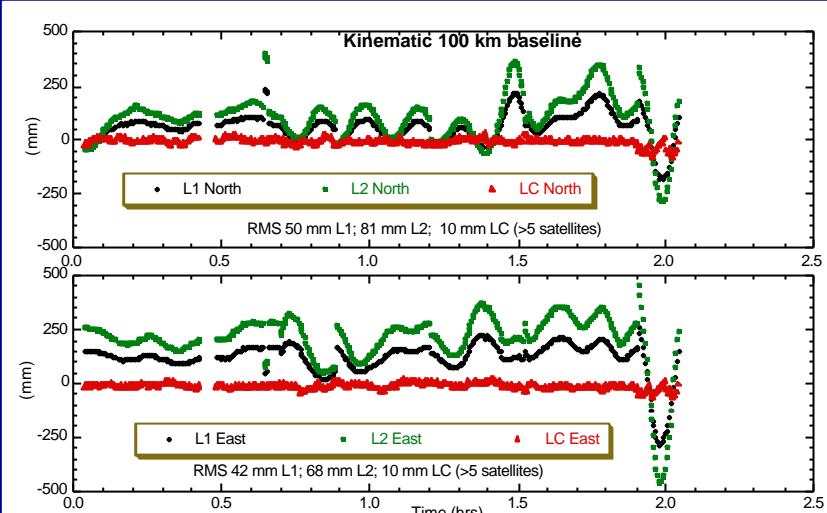
Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring





Effets sur la position (New York)

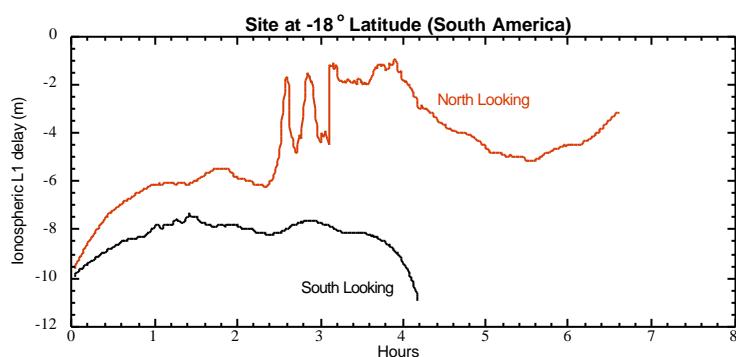


25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Exemple d'un electrojet équatorial (Amérique du Sud)



25-29 août 2003

Ecole d'été GDR-G2 Forcalquier

M-N Bouin/T. A. Herring

Résumé

- Les effets de l'ionosphère sont importants : dizaines de m sur du point positioning, de 1 à 10 ppm pour du positionnement différentiel
- Eliminé en grande partie par la correction bifréquence, au prix de plus de bruit.
- Les erreurs résiduelles sont faibles mais peuvent atteindre qq cm quand l'activité ionosphérique est importante.