

La Rotation forcée de Titan

Étude à 3 degrés de liberté

Benoît Noyelles^{1,2}, Anne Lemaître¹ & Alain Vienne^{2,3}

¹FUNDP (Namur, Belgique)

²IMCCE (Obs. Paris, UPMC (P6), USTL (Lille))

³Université des Sciences et Technologies de Lille

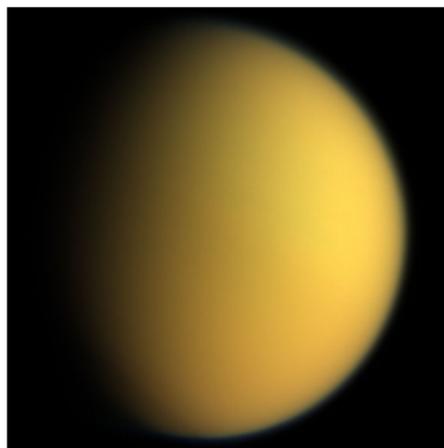
SF2A2007 - Grenoble

Plan

- 1 Introduction
- 2 Étude analytique
 - Recherche de l'équilibre
 - Les fréquences fondamentales de libration
- 3 Étude numérique
 - Principe
 - Résultats
- 4 Conclusion et perspectives

Titan

Satellite de Saturne



M	$2.36638 \times 10^{-4} M_{\text{t}_h}$
R	2575 km
d_0	1222345.284 km
e	0.0289
I	0.64°
T_{orb}	15.95 jours
J_2	$(3.15 \pm 0.32) \times 10^{-5}$
C_{22}	$(1.1235 \pm 0.0061) \times 10^{-5}$
$\frac{C}{MR^2}$	$\in [0.3; 0.4]$

État de Cassini

Synchronisation spin-orbite

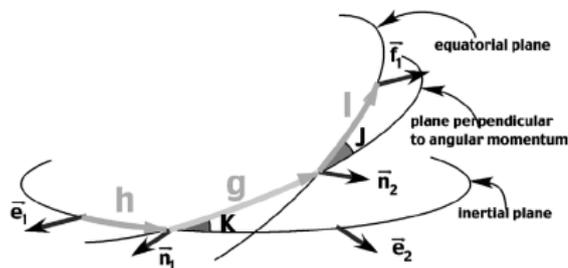
- Rotation et révolution de Titan synchronisées
Titan présente toujours la même face à Saturne
- Axe de plus faible inertie toujours orienté vers Saturne
- Les noeuds de l'équateur et de l'orbite alignés avec le centre de Titan

Principe de l'étude

- Titan ellipsoïde rigide
- Recherche de l'équilibre et des faibles mouvements autour
- Étude à 3 degrés de liberté

Les variables

Variables d'Andoyer modifiées



$$p = l + g + h$$

$$r = -h$$

$$\xi_q$$

$$P = \frac{G}{nC}$$

$$R = 2P \sin^2 \frac{K}{2}$$

$$\eta_q$$

G : moment cinétique

(ξ_q, η_q) liés au wobble J

Plan

- 1 Introduction
- 2 **Étude analytique**
 - Recherche de l'équilibre
 - Les fréquences fondamentales de libration
- 3 Étude numérique
 - Principe
 - Résultats
- 4 Conclusion et perspectives

Le hamiltonien du problème

Henrard & Schwanen 2004

$$\mathcal{H} = \frac{nP^2}{2} + \frac{nP^2}{8} \left[4 - \xi_q^2 - \eta_q^2 \right] \left[\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \xi_q^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \gamma_1 + \gamma_2} \eta_q^2 \right]$$

$$+ n \left(\frac{d_0}{d} \right)^3 \left(1 + \delta_s \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \right) \left[\delta_1 (x^2 + y^2) + \delta_2 (x^2 - y^2) \right]$$

avec : $\gamma_1 = J_2 \frac{MR^2}{C}$, $\gamma_2 = 2C_{22} \frac{MR^2}{C}$

$$\delta_1 = -\frac{3}{2} \left(\frac{n^*}{n} \right)^2 \gamma_1, \quad \delta_2 = -\frac{3}{2} \left(\frac{n^*}{n} \right)^2 \gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_s = \frac{5}{2} J_2 \hbar \left(\frac{R \hbar}{d_0} \right)^2$$

À l'équilibre

- $J = 0 \rightarrow \xi_q = 0, \eta_q = 0$
- $\sigma = p - \lambda + \pi = 0, \rho = r + \delta\Omega = 0$ (les 2 résonances)
- $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = 0, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} = 0$

On obtient :

- $K^* = 38'31.168 \approx \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 + \delta_2 - \frac{\dot{\Omega}}{n}} I$
- $P^* \approx 1 \approx 1 - \frac{\dot{\Omega}}{n} (1 - \cos K^*)$
- $R^* = 6.2773771522 \times 10^{-5}$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Étude analytique
 - Recherche de l'équilibre
 - Les fréquences fondamentales de libration
- 3 Étude numérique
 - Principe
 - Résultats
- 4 Conclusion et perspectives

Les fréquences fondamentales de libration

1 Centrage du hamiltonien

$$\xi_\sigma = \sigma \quad \eta_\sigma = P - P^*$$

$$\xi_\rho = \rho \quad \eta_\rho = R - R^*$$

$$\xi_q \quad \eta_q$$

2 Découplage des modes vibratoires

$$\mathcal{N} = \omega_U U + \omega_V V + \omega_W W$$

$$T_U = 2.09 \text{ ans}$$

$$T_V = 167.37 \text{ ans}$$

$$T_W = 306.62 \text{ ans}$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Étude analytique
 - Recherche de l'équilibre
 - Les fréquences fondamentales de libration
- 3 Étude numérique
 - Principe
 - Résultats
- 4 Conclusion et perspectives

Principe de l'étude numérique

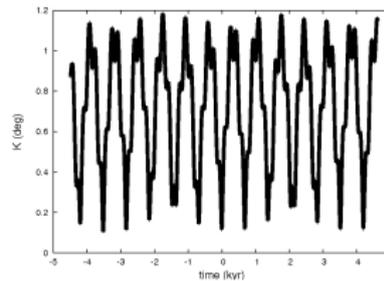
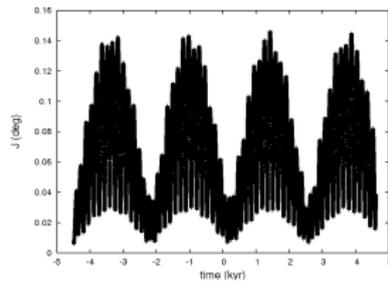
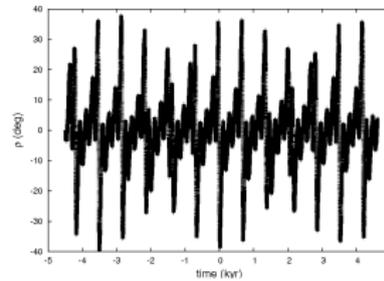
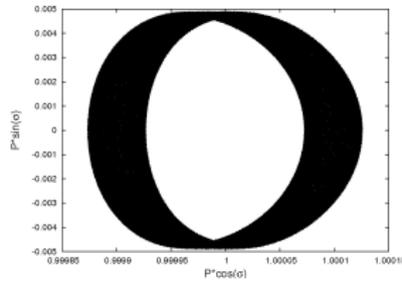
- 1 Intégration numérique des équations du hamiltonien
conditions initiales proches de l'équilibre
intégrateur d'Adams-Bashforth-Moulton (prédicteur-correcteur
d'ordre 10)
éphémérides TASS1.6 (Vienne & Duriez 1995)
- 2 Identification des solutions par analyse en fréquence
permet la séparation partie libre / partie forcée

Excellent accord sur les fréquences.

Plan

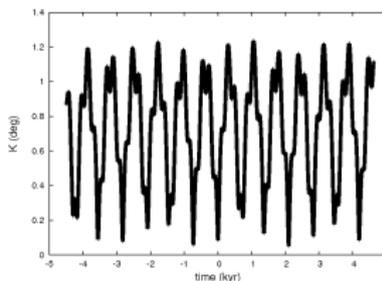
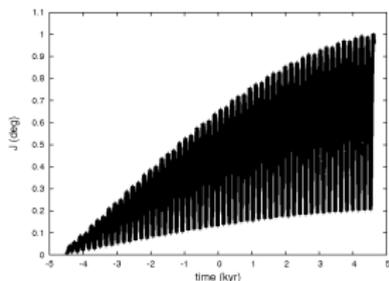
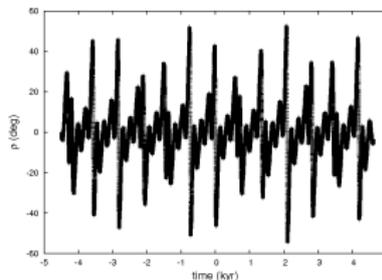
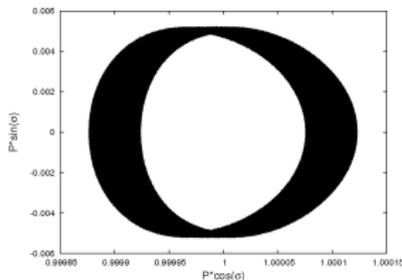
- 1 Introduction
- 2 Étude analytique
 - Recherche de l'équilibre
 - Les fréquences fondamentales de libration
- 3 Étude numérique
 - Principe
 - Résultats
- 4 Conclusion et perspectives

Résultats (1/2)



$$\frac{C}{MR^2} = 0.31$$

Résultats (2/2)



$$\frac{C}{MR^2} = 0.35$$

Conclusion et perspectives

- Forte influence du noeud sur la rotation de Titan.
- Possible résonance entre le wobble J et Ω .
- Prochaine étape : Titan différencié.