

# Relation entre changement de gravité et déplacement vertical induits par une charge.

Caroline de Linage, Jacques Hinderer  
& Yves Rogister



Institut de Physique du Globe, EOST, Strasbourg

# Différents contextes géodynamiques où observer $\Delta g$ et/ou $\Delta h$

Rebond post-glaciaire  
relaxation viscoélastique  
après dernière déglaciation

Volcanologie  
Injections de magma

Surcharges:  
- eau dans le sol  
- atmosphère  
- circulation océanique  
- déglaciation actuelle

Tectonique:  
- Surrection/subsidence  
(chaînes de montagne)  
- Déformation co-sismique  
(failles)

# Pourquoi s'intéresser au rapport $\Delta g/\Delta h$ ?

- λ  $\Delta g/\Delta h$  varie selon les processus physiques en jeu. La connaissance simultanée de  $\Delta g$  et de  $\Delta h$  permet de discriminer entre différentes interprétations géodynamiques.
  - déplacement à l'air libre avec/sans redistribution de masses (isostasie, tectonique)
  - attraction directe des masses (hydrologie)
- λ si  $\Delta g/\Delta h$  est constant, la mesure de  $\Delta g$  permet d'accéder directement à  $\Delta h$ , et inversement
  - Ex: rebond post-glaciaire ( $\Delta g/\Delta h = -0.15 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ , cf. *Wahr et al. 1995*)

# Plan

- λ étude théorique du rapport dans domaine spectral
- λ interprétation de la limite spectrale à l'aide de différents modèles de Terre
- λ discussion sur la pertinence d'un rapport moyen dans la cas d'une charge

# Hypothèses

λ Terre élastique à symétrie sphérique compressible

λ Charge à la surface (2D)

$$\sigma(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sigma_n^m Y_n^m(\theta, \lambda)$$

λ Étude dans le domaine spectral des rapports  $g_n/u_n$  pour chaque degré  $n$  de la source

$$g(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sigma_n(\theta, \lambda)$$

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma_n(\theta, \lambda)$$



$$\frac{g(\theta, \lambda)}{u(\theta, \lambda)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} g_n \sigma_n(\theta, \lambda)}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sigma_n(\theta, \lambda)}$$



$$\frac{g_n}{u_n}$$

!! le degré  $n$  du rapport  $n$ 'est pas le rapport des termes de degré  $n$  !!  
∫  $g/u$   $n$ 'est pas linéaire par rapport à la source

# Séparation des différentes contributions dans $\Delta g$

$$g = g^N + g^E$$

## $\lambda$ Effets directs d'attraction Newtonienne

- de la masse située au point d'observation (effet local)
  - sa position par rapport à la surface détermine le signe de  $g^N$
- des autres masses sur l'ensemble de la Terre (effet global)

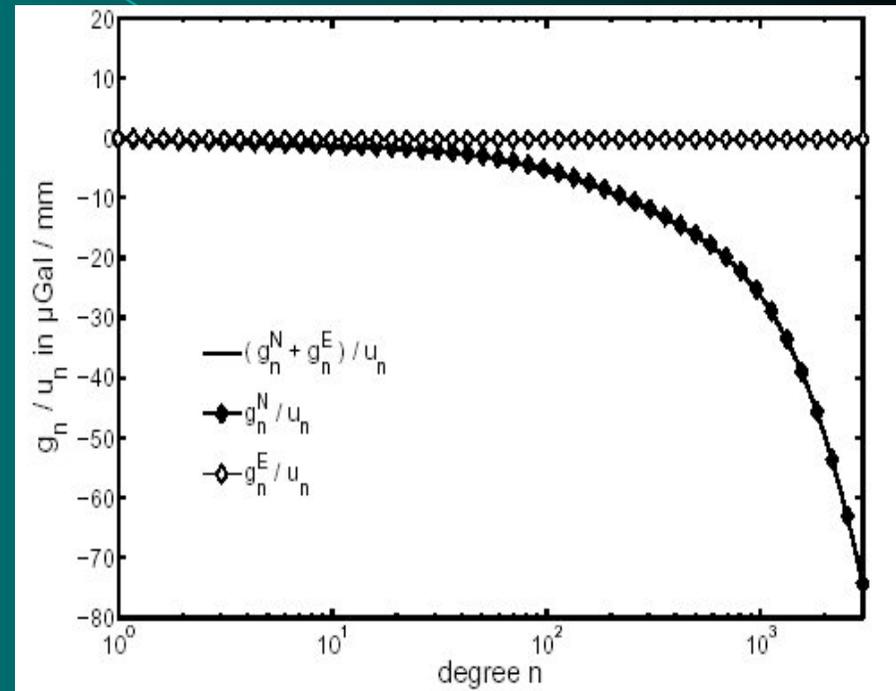
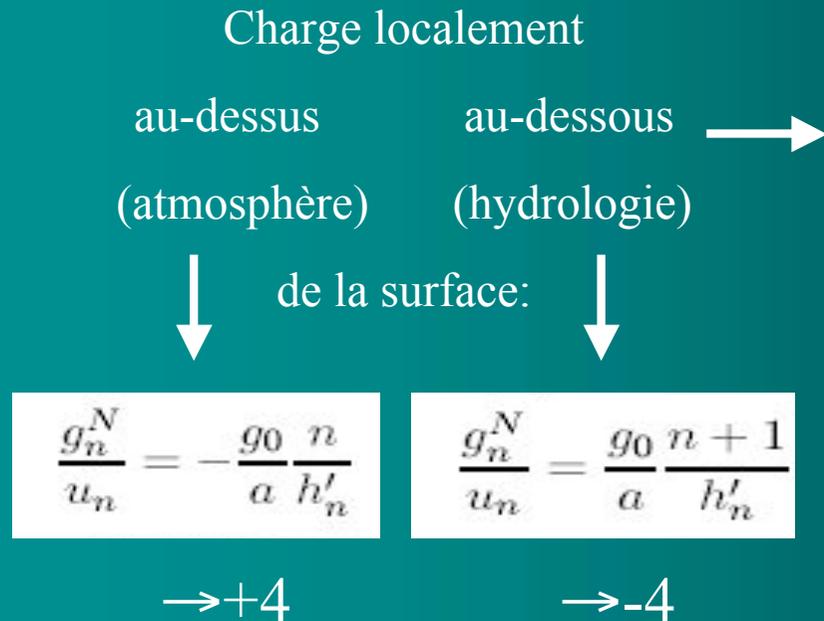
## $\lambda$ Effets élastiques

$$g_n^E = -\frac{3g_0}{a\bar{\rho}} \frac{2h'_n - (n+1)k'_n}{2n+1}$$

- Effet du déplacement vertical de la surface ( $h'_n$ )
- Effet de la redistribution des masses ( $k'_n$ )
  - 2 effets de signes opposés

$$u_n = \frac{3}{\bar{\rho}} \frac{1}{2n+1} h'_n$$

# Rapport $g_n/u_n$ versus $n$



- Très forte sensibilité au contenu spectral HF de la source via le terme d'attraction des masses locales
- très forte variabilité spatiale du rapport  $g/u$  selon les caractéristiques de la source
- $g_n^E/u_n$  constant: même sensibilité au degré de  $g^E$  et  $u$

# Gravité élastique/déplacement vertical $g_n^E/u_n$

- Effet de la redistribution des masses:

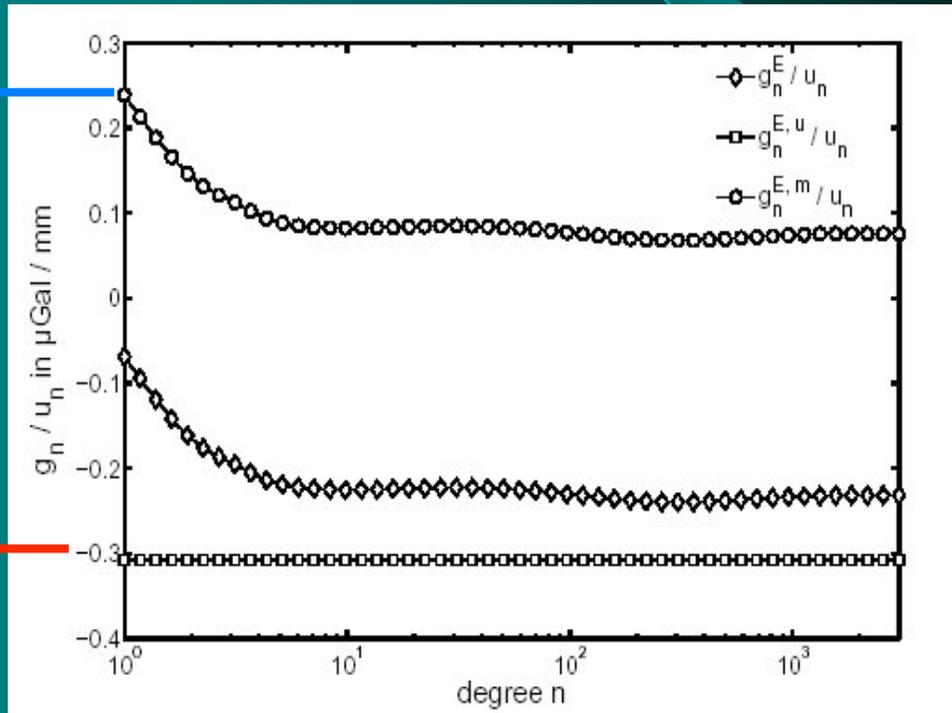
$$\frac{g_n^{E,m}}{u_n} = \frac{g_0 (n+1) k'_n}{a h'_n}$$

- Effet du déplacement vertical:

$$\frac{g_n^{E,u}}{u_n} = -\frac{2g_0}{a}$$

→ gradient à l'air libre

**-0.3080  $\mu\text{Gal}/\text{mm}$**



Limite  
( $\mu\text{Gal}/\text{mm}$ )

**0.0730**

**-0.2032**

# Interprétation de la limite de $g_n^E/u_n$

Quand  $n \gg 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n^{E,m}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_0 (n+1) k'_n}{a h'_n} = 2\pi G \bar{\rho}$$

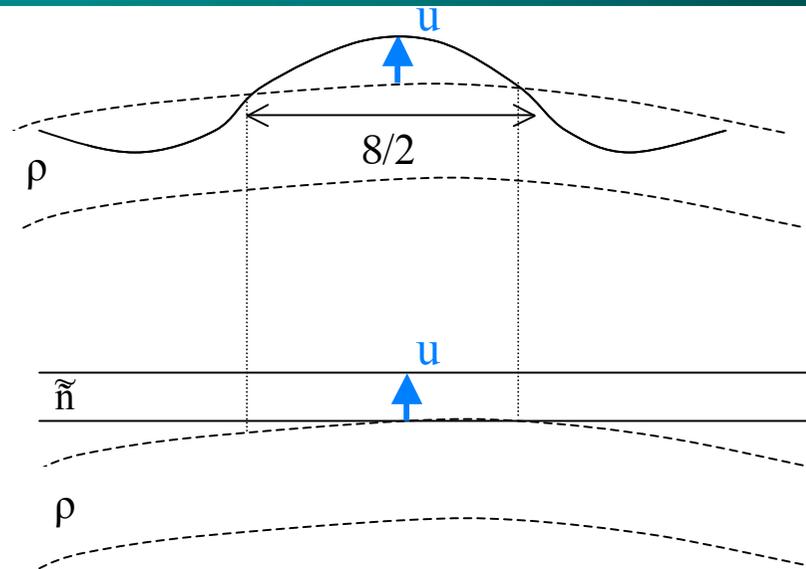
- 1° la Terre est localement plate
- 2° la redistribution des masses est superficielle
- l'effet de la redistribution des masses est équivalent à un effet de Bouguer plan

Question:

À quelle condition

a-t-on:

$\tilde{n} = \tilde{n} \text{ ??}$



$$\ddot{e} = \frac{2\partial a}{n}$$

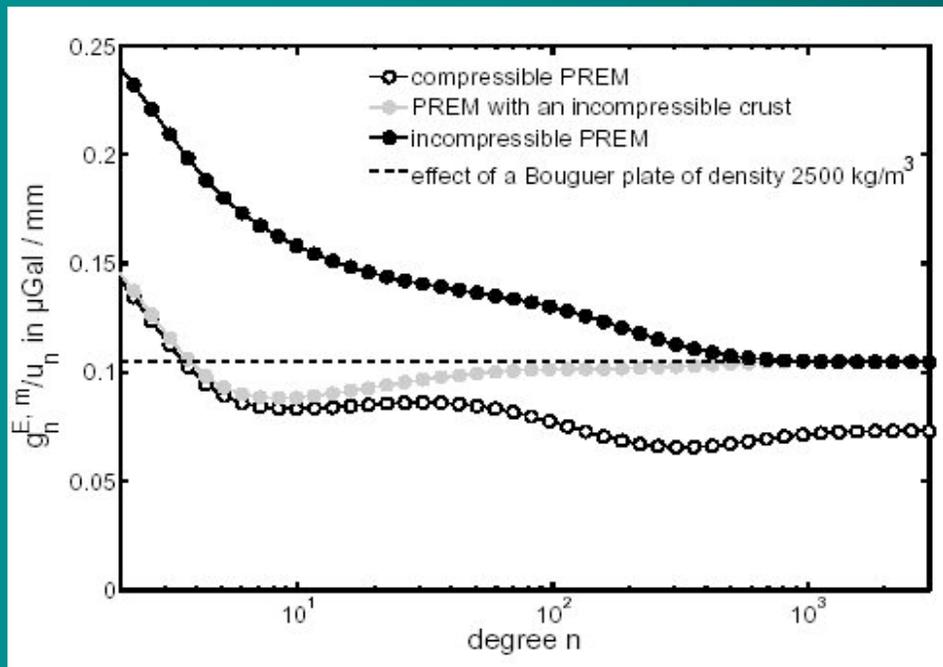
Effet de Bouguer plan  
(avec  $h = u$ ):

$$\Delta g = -\frac{2g_0}{a}h + 2\pi G \rho h$$

Ex: si  $\rho = 2.67$   $\Delta g / \Delta h = -0.20 \mu\text{Gal/mm}$  ∫ « gradient corrigé de Bouguer »

# Effet de la compressibilité sur la limite de $g_n^E/u_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n^{E,m}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_0 (n+1) k'_n}{a h'_n} = 2\pi G \bar{\rho}$$



$\lambda$  modèle PREM  
incompressible OU  
compressible avec croûte  
incompressible:

$$\tilde{n} = \tilde{n}$$

$\lambda$  modèle PREM  
compressible:

$$\tilde{n} < \tilde{n}$$

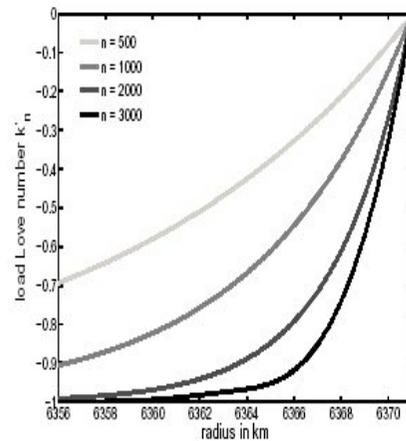
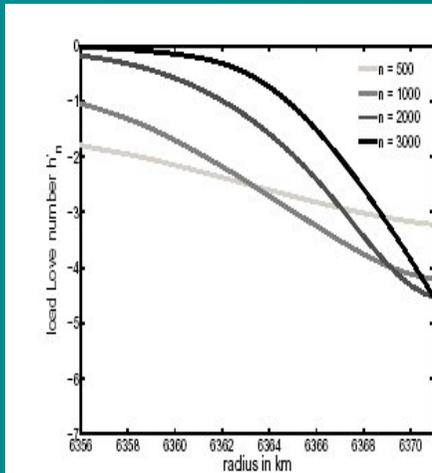
	Limite de $g^{E, m}_n/u_n$	Limite de $g^E_n/u_n$	Densité équivalente
Modèle de Terre incompressible OU avec croûte incompressible	0.1048	-0.2032 = gradient de Bouguer	2.50 $\tilde{n} = \hat{n}$
Modèle de Terre compressible	0.0730	-0.2350	1.74 $\tilde{n} < \hat{n}$

# Effet de la compressibilité sur les nombres de Love

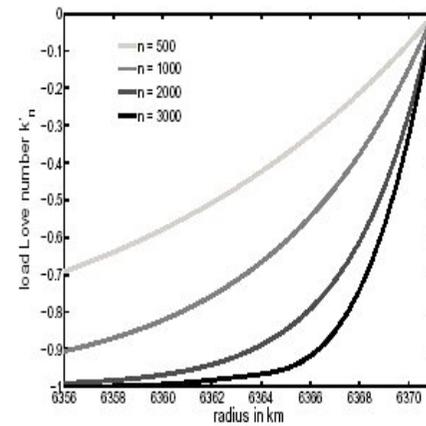
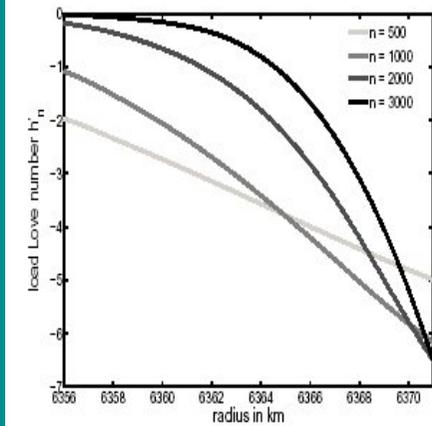
$h'_n$

$k'_n$

Croûte  
incompressible



Croûte  
compressible



- λ à n=3000 effets élastiques localisés dans la croûte
- λ déformation plus importante si croûte compressible
- λ même redistribution des masses

$$\frac{g_n^{E,m}}{u_n} = \frac{g_0 (n+1) k'_n}{a h'_n}$$

# Etude de $g_n/u_n$ pour tous les degrés

- λ Recherche d'un rapport  $g/u$  indépendant de la source
- λ Pb de la charge locale (Newtonien)

$$g_n^N = g_n^{N, \text{local}} + g_n^{N, \text{global}}$$

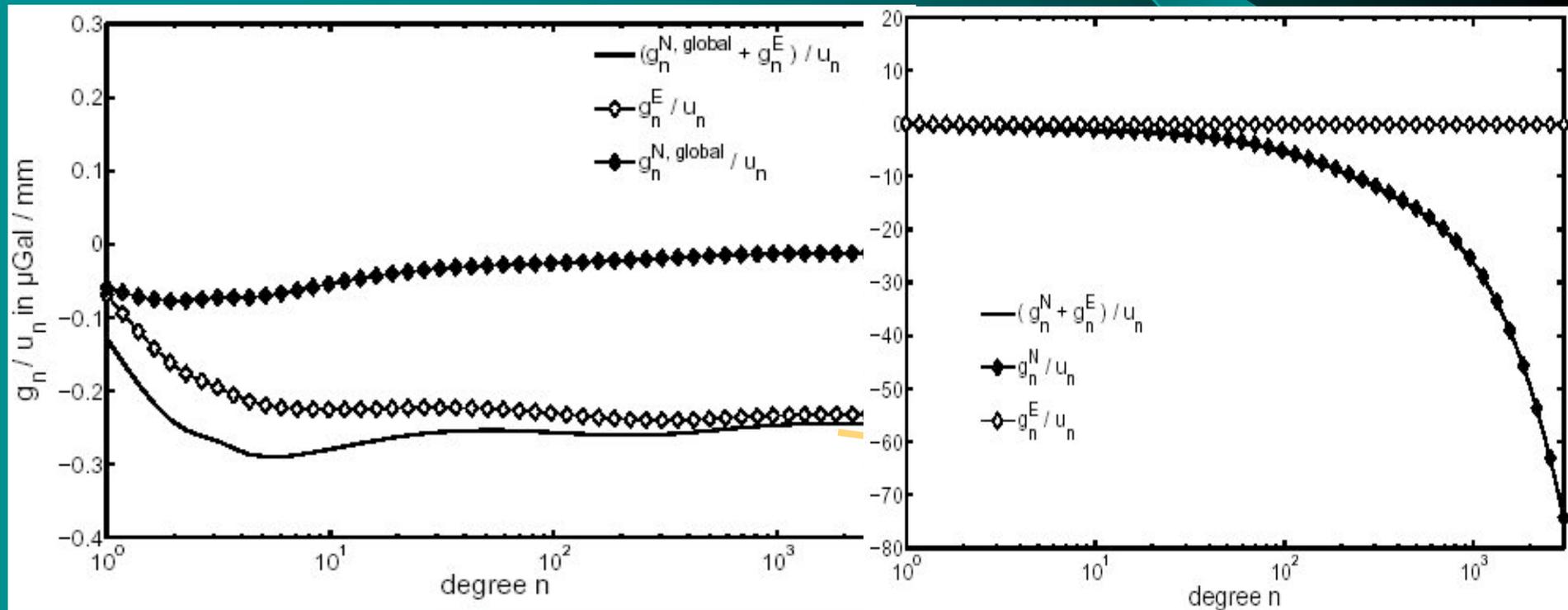
$$g_n^{N, \text{local}} = \pm 2\pi G$$

$$g_n^{N, \text{global}} = -\frac{3g_0}{a\bar{\rho}} \frac{-1/2}{2n+1}$$

- Si pas de charge locale, on enregistre: 1° les effets élastiques et 2° l'attraction des charges globales
  - surcharges océaniques loin des côtes
  - rebond post-glaciaire: effet purement viscoélastique

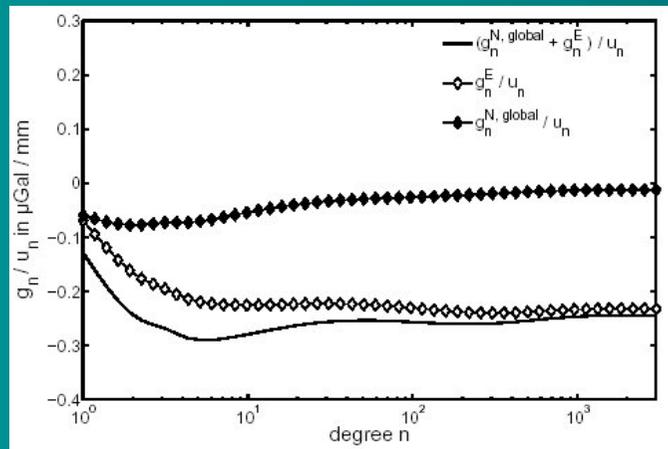
# Rapport $g_n/u_n$ versus $n$ : cas où pas de masse localement

$$\frac{g_n^{N, \text{global}} + g_n^E}{u_n} = \frac{g_0}{a} \left( \frac{1}{2h'_n} - 2 + \frac{(n+1)k'_n}{h'_n} \right)$$



# Moyenne spectrale des rapports

$$g_n/u_n$$

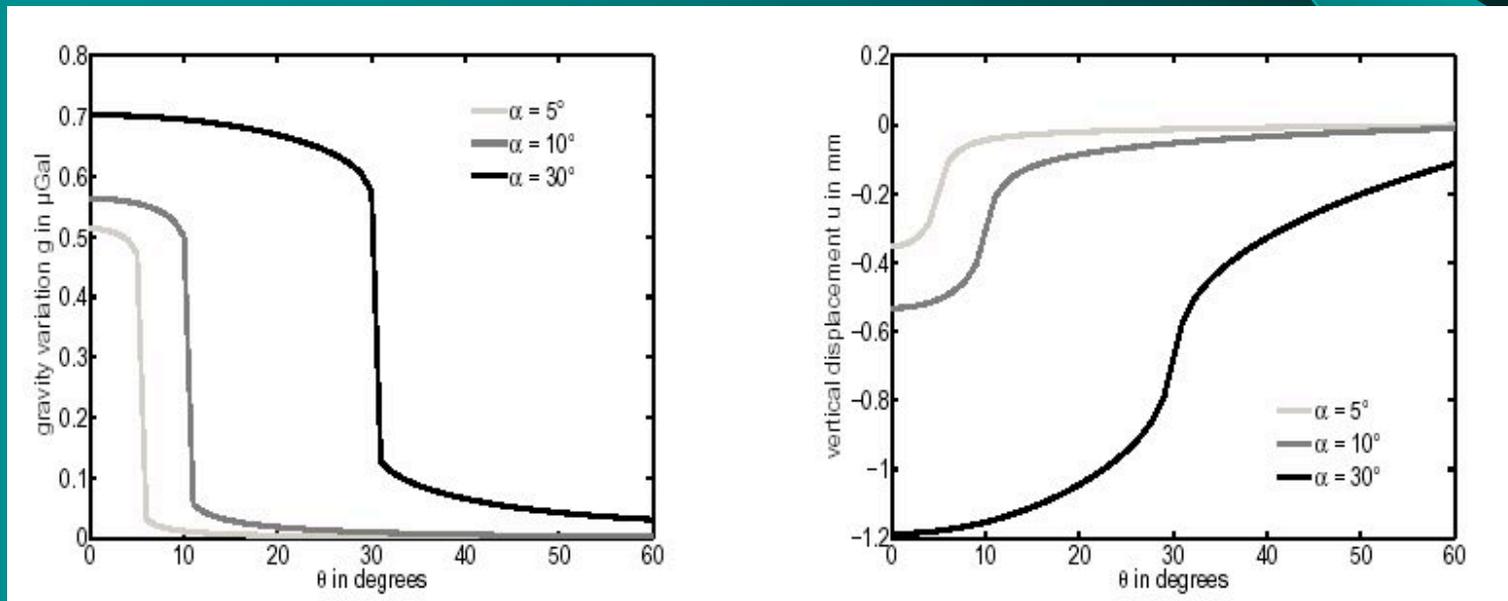


$$\sum_{n=2}^{nmax} \frac{g_n}{u_n}$$

nmax	10	50	100	1000
Moyenne ( $\mu\text{Gal}/\text{mm}$ )	-0.2769	<b>-0.2605</b>	-0.2568	-0.2554

# Application

- λ Calottes sphériques homogènes (1 cm d'eau) et d'ouverture angulaire  $\alpha = 5^\circ, 10^\circ$  et  $30^\circ$

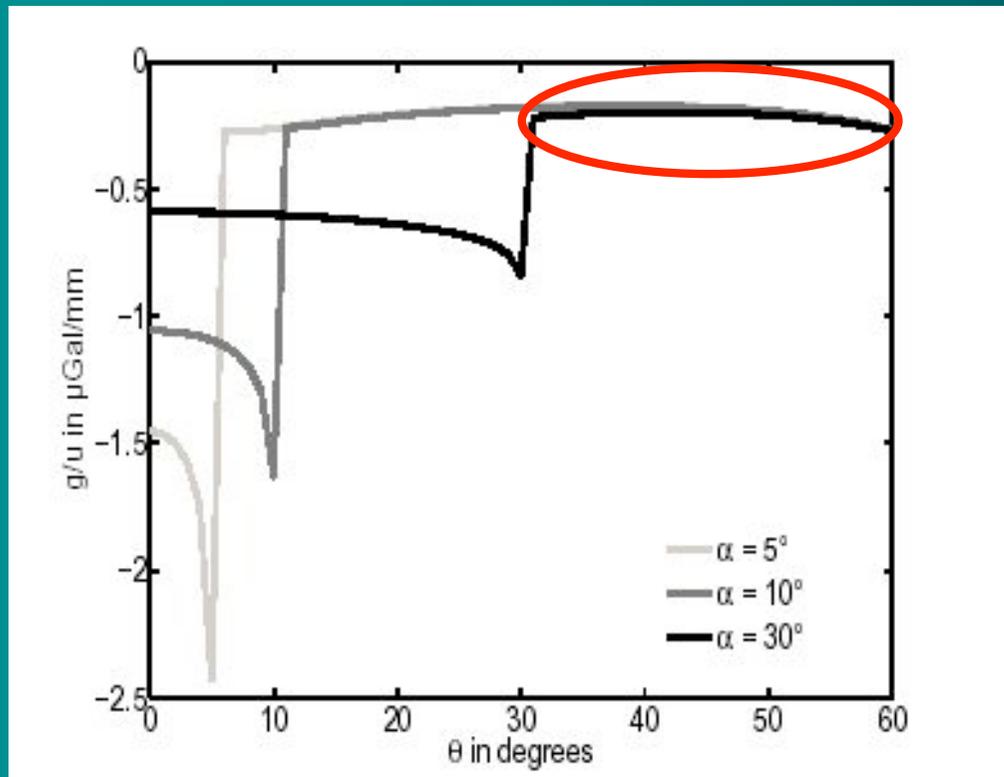


$g$  ( $\mu\text{Gal}$ )

Distance  $\eta$  au centre de la calotte ( $^\circ$ )

$u$  (mm)

# Rapport g/u



- sur les calottes: la valeur de  $g/u$  dépend de la taille de la calotte
- en-dehors:  $g/u$  est constant autour de  $-0.21 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  quelle que soit la taille de la charge

Ouverture $\alpha$ ( $^\circ$ )	5	10	30
$g/u$ moyen du bord à $\theta=60^\circ$ ( $\mu\text{Gal}/\text{mm}$ )	-0.21	-0.20	-0.22

# Conclusion

Dans le cas de surcharges:

- Le rapport  $g/u$  dépend fortement (signe, amplitude) des masses locales (localisation, taille)
- La limite élastique de  $g/u$  est égale au gradient corrigé de Bouguer ( $-0.20 \mu\text{Gal}/\text{mm}$ ) si la couche la plus superficielle du modèle de Terre est incompressible. Sinon, la limite est inférieure de 16%.
- On peut proposer  $-0.26 \mu\text{Gal}/\text{mm}$  comme valeur « moyenne » de  $g/u$  à condition d'être en-dehors de la charge